Examen du module “Algèbre et Géométrie”
Master 1 en Mathématiques Fondamentales
Université Paul Sabatier, 06/2011 Solutions et Indications

Exercice 1. Soit N le $\mathbb{Z}$-sous-module de $\mathbb{Z}^3$ engendré par les trois éléments $\nu_1 = (6, 2, 14), \nu_2 = (18, 4, 40), \nu_3 = (6, -2, 10)$. Soit $M = \mathbb{Z}^3/N$ le $\mathbb{Z}$-module quotient de $\mathbb{Z}^3$ par N.

i) Montrer que N est un $\mathbb{Z}$-module libre, et trouver une base de N.

Tout sous-module d'un module libra de type fini d'un anneau principal est lui-m ême libre. En particulier, N est libre.

Une base de N:

$\eta_1 = 3\nu_1 - \nu_2 = (0, 2, 2) = 2 \times (0, 1, 1), \eta_2 = \nu_1 - \eta_1 = (6, 0, 12) = 6 \times (1, 0, 1)$.

Il est facile de voir que (η_1, η_2) est une base de N.

ii) Quel est le rang du $\mathbb{Z}$-module M ?

$rank_{\mathbb{Z}}M = rank_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}^3 - rank_{\mathbb{Z}}N = 3 - 2 = 1$.

iii) Trouver une décomposition de M (sous forme de somme directe de $\mathbb{Z}$-modules cycliques).

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$

Exercice 2. i) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, et determiner le polynome irreductible de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ sur $\mathbb{Q}$.

Il est évident que $\sqrt{2} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ donc $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$. De l'autre côté, on a $\sqrt{5} - \sqrt{2} = 3/(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, donc $\sqrt{5} = (1/2)((\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} + \sqrt{2})) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, et de même pour $\sqrt{2}$.

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})].[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \times 2 = 4$, donc le pôlymone irreductible de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est de dégré 4.

Mettons $a = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. On a $a^2 = 7 + \sqrt{40}$, $(a^2 - 7)^2 - 40 = 0$, ou $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. Donc le pôlymone irreductible de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est $X^4 - 14X^2 + 9$.

ii) Déterminer le pôlynome irreductible de $b = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ sur $\mathbb{Q}$.

On a $\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7} = 2\sqrt{10}/b$, donc $2(2+5+7)+4\sqrt{10} = (\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})^2 = b^2+40/b^2 \in \mathbb{Q}(b)$, donc $\sqrt{10} \in \mathbb{Q}(b)$, et donc $\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7} \in \mathbb{Q}(b)$, d'où $\mathbb{Q}(b) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$. On obtient que le degré du pôlynome irreductible de b est égal à $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = 8$.

On a $b^2 + 40/b^2 = 2(2 + 5 + 7) + 4\sqrt{10} = 28 + 4\sqrt{10}$, donc $(b^2 + 40/b^2 - 28)^2 - 160 = 0$, ou $(b^4 - 28b^2 + 40)^2 - 160b^4 = 0$.

Exercice 3. Soit $K = \mathbb{Q}$, $P(X) = X^4 - 11$, et soit L un corps de décomposition du polynome P sur K.

i) Déterminer le groupe de Galois $Gal(L/K)$, et calculer $[L : K]$.

Il est facile de voir que P est irreductible sur K. Notons $\eta_1 = \sqrt[4]{11}, \eta_2 = i\eta_1, \eta_3 = -\eta_1, \eta_4 = -i\eta_1$ ses quatre racines, où $i = \sqrt{-1}$. On peut écrire $L \cong K(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = K(\eta_1, i)$, et on a $[L : K] = [K(\eta_1, i) : K(\eta_1)].[K(\eta_1) : K] = 2 \times 4 = 8$. Donc le groupe da Galois $Gal(L/K)$ a 8 éléments.

Soit ϕ un élément de $Gal(L/K)$. Alors $\phi(\eta_1)$ est une racine de P, $\phi(i) = \pm i$, et ϕ est complètement déterminé par $\phi(\eta_1)$ et $\phi(i)$. On a donc 8 possibilités, qui correspondent aux 8 éléments de $Gal(L/K)$:

$\phi_k(\eta_1) = \eta_k, \phi_k(i) = i$, $k = 1, 2, 3, 4$

$\phi_{k+4}(\eta_1) = \eta_k, \phi_{k+4}(i) = -i$, $k = 1, 2, 3, 4$.

C'est le groupe diédral D_4 (où $\phi_1, \ldots, \phi_4$ sont les rotations).

ii) Trouver tous les sous-extensions intermédiaires de L/K.

Il faut trouver les sous-groupes de $Gal(L/K) \cong D_4$ (qui sont non-triviaux et strictement plus petits que $Gal(L/K)$):

* Le sous-groupe $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$, qui correspond à la sous-extension $K(i)$

* Le sous-groupe $\{\phi_1, \phi_3, \phi_5, \phi_7\}$, ext. $K(\sqrt{11})$

* Le sous-groupe $\{\phi_1, \phi_3, \phi_6, \phi_8\}$, ext. $K(i\sqrt{11})$

* Le sous-groupe $\{\phi_1, \phi_3\}$, ext. $K(i, \sqrt{11})$

* Le sous-groupe $\{\phi_1, \phi_5\}$ ext. $K(\eta_1)$

* Le sous-groupe $\{\phi_1, \phi_6\}$ ext. $K((1 + i)\eta_1)$

* Le sous-groupe $\{\phi_1, \phi_7\}$ ext. $K(i\eta_1)$

* Le sous-groupe $\{\phi_1, \phi_8\}$ ext. $K((1 - i)\eta_1)$

iii) Trouver un élément primitif a de l'extension L/K, c'est à dire tel que $L = K(a)$.

On peut mettre $a = i + \sqrt[4]{11}$.