Exercice 1. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $tr(A^2) < \frac{9n}{16}$.

Montrer que l'équation $M^2 + M + I_n = A$ n'admet pas de solution M symétrique réelle.

Exercice 2. On rappelle qu'une matrice réelle symétrique M d'ordre n est *positive* si la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est positive.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$) désigne l'espace des matrices réelles symétriques (resp. symétriques positives).
(a) vérifier qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ssi pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tX\,M\,X \geq 0$.
(b) Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(BU) \leq tr(B)$.

Exercice 3. Déterminer le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :
a) $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(X) = \sum_{1\leq i<j\leq 4} x_i x_j$ où $X = (x_1, ..., x_4)$.
b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(X) = a^2x^2 + (1-a)y^2 + (2-a)z^2 - 2axy + 2axz + 2(a-1)yz$ où a est un paramètre réel et $X = (x, y, z)$.

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Donner une base orthonormale de diagonalisation de u.
(b) Soit la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(X) = 4x^2+7y^2+4z^2+4xy-2xz-4yz$, où $X = (x, y, z)$. Donner la forme polaire de q. Déduire de (a) une décomposition de q en carrés de formes linéairement indépendantes.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère la forme quadratique sur E définie par

$$Q(X) = tr(M^2) + \big(tr(M)\big)^2.$$

1) Déterminer φ la forme polaire de q.
2) On considère les sous-espaces de E, $\mathcal{S} = \{M \in E,\ {}^tM = M\}$ et $\mathcal{A} = \{M \in E,\ {}^tM = -M\}$.
a) Donner une base de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{A}$ et en déduire leur dimension. Justifier que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans E.
b) Montrer que pour tout x non nul dans $\mathcal{S}$, $Q(x) > 0$ et pour tout x non nul dans $\mathcal{A}$, $Q(x) < 0$.
2) Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont φ-orthogonaux.
3) En déduire le rang et la signature de Q.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et Q une forme quadratique sur E de signature (r, s). Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que :
a) Si Q est définie positive sur F alors $r \geq dim\ F$.
b) Si Q est définie négative sur F alors $s \geq dim\ F$.
c) Si $dim\ F > max(r, s)$, montrer qu'il existe x et y dans F tels que $Q(x) \leq 0$ et $Q(y) \geq 0$. En déduire que F contient au moins un vecteur isotrope non nul. (*Indication : on pourra étudier* $P(\alpha) = Q(\alpha x+y)$).

Exercice 7. Sur $\mathbb{R}^n$ et avec la notation $x = (x_1, ...x_n)$, on considère la forme quadratique

$$Q(x) = \sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{i+j} x_i x_j.$$

1) Soit l la forme linéaire $l(x) = \sum_{1\leq i\leq n} (-1)^i x_i$ et H l'hyperplan $l(x) = 0$.
a) Démontrer que $l(x)^2 = \sum_{1\leq i\leq n} x_i^2 + 2Q(x)$.

b) Démontrer que si $x \in H \setminus \{0\}$, alors $Q(x) < 0$.
2) En déduire la signature de Q.
Indication : On pourra utiliser l'exercice 6 et calculer $Q(x)$ pour un vecteur x n'appartenant pas à H.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus 2 à coefficients complexes. On définit φ par $\varphi(P,Q) = P(1)\overline{Q(1)} + P(i)\overline{Q(i)} + P(-i)\overline{Q(-i)}$.
(a) Montrer que φ est un produit hermitien sur E.
(b) Trouver une base orthonormale (G_0, G_1, G_2) de E telle que deg $G_k = k$, pour $k = 0, 1, 2$.

Exercice 9. les matrices suivantes sont-elles hermitiennes ? unitaires ?

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{it} & e^{it} \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver P unitaire et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 11. Soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et θ réel. Trouver D diagonale et U unitaire carrées d'ordre 2 telles que $UDU^* = \begin{bmatrix} 0 & z \\ \bar{z} & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 12. Soient H_1 et H_2 deux matrices hermitiennes positives telles que H_1 et $-H_2$ sont semblables. Montrer que $H_1 = H_2 = 0$.

Exercice 13. $E = \mathbb{C}^3$ est muni du produit hermitien canonique $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{3} \overline{x_k} y_k$.

Soit u l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique de E :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) La matrice A est-elle symétrique ? hermitienne ? unitaire ? inversible ? L'endomorphisme u est-il hermitien ? unitaire ? normal ? un automorphisme ?
2) Montrer que u admet 3 valeurs propres réelles α, β, γ vérifiant les inégalités :

$$-2 < \gamma < -1 \quad 1 < \beta < 2 < \alpha < 3$$

Calculer la somme et le produit de ces 3 valeurs propres.
3) On pose $v_\alpha = (\alpha(2-\alpha)\,,\, i\alpha\,,\, (1-i)(2-\alpha))$ et on définit de manière analogue v_β et v_γ. Montrer (sans calcul) que $(v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$ est une base orthogonale de E (i.e. base et famille orthogonale) et écrire la matrice de u dans cette base. Le résultat vous surprend-il ?