Exercice 1. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit F le s.e.v. d'équation $x - z = 0$.
1) Quelle est la dimension de F ? Donner une base de F et une base de $F^\perp$.
2) Donner la matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$ de la projection orthogonale sur F.
3) Donner la matrice dans la même base $\mathcal{E}$ de la symétrie orthogonale par rapport F.

Exercice 2. L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel (dont on notera $||.||$ la norme associée) et de sa base canonique $\mathcal{E}$. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ déterminé par le système d'équations
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(1) Quelle est la dimension de F ? Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F et une base orthonormée de cet orthogonal.
(2) Prouver, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, l'égalité : $dist(x, F) = ||proj_{F^\perp}(x)||$.
(3) Soit le vecteur $w = (-1, 2, 0, 4)$; déterminer la distance de w à F.

Exercice 3. Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $||.||$ la norme associée au produit scalaire, et $x, y \in E$.
On rappelle qu'un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension n est un s.e.v. de dimension $n - 1$. Montrer que :
(a) si $||x|| = ||y||$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.
(b) si $\langle x, y\rangle = ||y||^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

Exercice 4. Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
Démontrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$: $\big(P(f)\big)^* = P(f^*)$. En déduire que f et f^* ont même polynôme minimal. Prouver que f est diagonalisable si et seulement si f^* l'est.

Exercice 5. Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien et p un projecteur (i.e. $p \circ p = p$) de E.
(a) Montrer que p^* est un projecteur.
(b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $p^* = p$
(ii) p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(p)$
(iii) p et p^* commutent.

Exercice 6. Déterminer les valeurs des réels a, b, c pour lesquelles les matrices suivantes sont orthogonales :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ b & c \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ a & b & c \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \;;\; C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & +2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & a \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & b \\ 0 & \sqrt{6} & c & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit E un espace euclidien de dimension 3. On considère l'application φ de E dans E définie par $\varphi(u) = u + \lambda\langle u, v\rangle v$ avec λ et v fixés. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un endomorphisme orthogonal.

Exercice 8.
1)a. Soit r une rotation d'angle θ du *plan*. Montrer que la matrice de r dans une *base orthonormale directe* quelconque est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

b. Soit R une rotation de l'*espace*, d'angle θ et d'axe Δ. Déduire de la question précédente que la matrice de R dans une base orthonormale directe dont le premier vecteur est unitaire et dirige Δ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
c. Montrer que la trace de la matrice, dans une *base quelconque* de $\mathbb{R}^3$, d'une rotation de l'espace d'angle θ, est $1 + 2\cos\theta$.
2)a. Soit R une rotation de l'*espace* d'axe dirigé par un vecteur $\mathbf{u}$ et d'angle θ. Montrer que pour tout $\mathbf{x}$ de E on a :

$$r(\mathbf{x}) = (\cos\theta)\mathbf{x} + (\sin\theta)\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} + 2(\sin^2\theta/2)(\mathbf{x}.\mathbf{u})\mathbf{u}.$$

indication : on pourra décomposer $\boldsymbol{x}$ sur vect $\boldsymbol{u}$ et (vect $\boldsymbol{u}$)$^\perp$
b. En déduire que $\sin\theta$ est du signe du produit mixte $[\mathbf{u}, \mathbf{x}, r(\mathbf{x})]$ pour tout vecteur $\mathbf{x}$ non colinéaire à $\mathbf{u}$.

Exercice 9. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer la matrice dans la base canonique :
a) du demi-tour autour de la droite $D : x = 2y = 2z$.
b) de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'axe dirigé par $(1, 1, 1)$.

Exercice 10. Donner la nature géométrique et les éléments caractéristiques de chacun des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
a) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 11. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que la matrice A est orthogonale.
(b) Justifier que u est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, puis préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.
(*indication : chercher tout d'abord les s.e.v. propres éventuels de u*).

Exercice 12. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que f est un endomorphisme orthogonal.
2) f est-elle une rotation ? Une symétrie ? Déterminer $D = ker(f + id)$.
3) On note s la symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$. Montrer que $f \circ s = s \circ f$ est une rotation et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$ on défini les plans $P_1 : x + y + z = 0$ et $P_2 : x + 2y - z = 0$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $s_{P_1} \circ s_{P_2}$ où s_P désigne la réflexion orthogonale par rapport au plan P.