L2 MM - Algèbre - Feuille TD4, 2010-2011

∗ **Savoir reconnaitre un produit scalaire et utiliser ses propriétés.**

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Déterminer parmi les applications φ suivantes, définies sur $E \times E$ lesquelles correspondent à un produit scalaire sur E :
a) $E = \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy$
b) $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + yy' - 2xy' + 2yx'$
c) $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y), (x', y')) = 3xx' + yy' + 2xy' + 2yx'$
d) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$
e) $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\varphi(f, g) = \int_0^1 fg dt$.

Exercice 2. Soit a un réel et $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + (a + 12)x_3y_3 - 3(x_1y_3 + x_3y_1) + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$$

a) Montrer que φ_a est une forme bilinéaire symétrique.
b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles φ_a est un produit scalaire.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ définie sur E^2 par $\varphi(A, B) = tr({}^tAB)$.
a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
b) Soit $A \in E$ tel que ${}^tAA = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 4. Soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur un espace euclidien E. Et soient x, $y \in E$ tels que $\forall z \in E$, $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$. Montrer que $y = x$.

∗ **Savoir utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

Exercice 5. Après avoir introduit un produit scalaire adéquat sur un espace euclidien E à préciser, montrer les inégalités suivantes :
a) Pour a, b, $c \in \mathbb{R}$, $|6a + 3b + 2c| \le 7\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
b) Pour a, b, c, a', b', $c' \in \mathbb{R}$, $|aa' - 2ab' - 2ba' + 6bb'| \le \sqrt{a^2 - 4ab + 6b^2}\sqrt{a'^2 - 4a'b' + 6b'^2}$
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $\displaystyle\sum_{q=1}^{n-1} \frac{q}{(n-q)^2} \ge \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{q=1}^{n-1} \frac{q}{n-q}\right)^2$
d) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, à coefficients positifs, et pour $x, y \in \mathbb{R}^+$, $P(\sqrt{xy})^2 \le P(x)P(y)$.

Exercice 6. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E. Montrer que $\displaystyle\|\sum_{i=1}^{n} v_i\|^2 \le n \sum_{i=1}^{n} \|v_i^2\|$

∗ **Savoir utiliser la notion d'orthogonalité**

Exercice 7. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par $v = (1, -1, 3, 0, 2)$ et $w = (2, -2, 5, 1, 1)$. Donner une base de l'orthogonal $F^\perp$ de F.

Exercice 8. Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces de E. Montrer que :

$$\begin{aligned} (F + G)^\perp &= F^\perp \cap G^\perp \\ (F \cap G)^\perp &= F^\perp + G^\perp \end{aligned}$$

∗ **Bases orthonormées et savoir utiliser la métode de Gram-Schmidt**

Exercice 9. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E. On suppose que :

$$\forall i \le n, \|e_i\| \ge 1 \quad (1)$$

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2 = \|x\|^2 \quad (2)$$

a) Montrer que la famille $b = (e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale de E.
b) Montrer que b est une base de E.

Indication : on pourra développer $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle\, e_i\|^2$

Exercice 10. Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E préservant l'orthogonalité, c'est à dire : $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$. Montrer qu'il existe un réel $k \geq 0$ tel que $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice 11. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$. Construire une base orthonormale pour φ.

$*$ **Savoir utiliser les projecteurs orthogonaux, calculer une projection**

Exercice 12. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 13. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et on note (e_1, e_2, e_3, e_4) sa base canonique. Soient $u = e_1 + e_3$, $v = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ et $F = \text{vect}(u, v)$.
a) Construire une base orthonormée de F.
b) Déterminer la matrice dans la base $(e_j)_{1\leq j\leq 4}$ de la projection orthogonale sur F.
c) En déduire la distance du vecteur $w = e_1 - e_2 + 2e_3 + e_4$ au sous-espace F.
d) Quelle est la matrice dans la base $(e_j)_{1\leq j\leq 4}$ de la symétrie orthogonale par rapport à F ?

Exercice 14. Calculer l'inf pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de :

$$\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

indication : on traduira le problème en terme de distance à un sous-espace.