UPS - L2 Math-Méca - TD d'algèbre 2 - septembre 2010.

Exercice 1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$?

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Réduire A, puis calculer A^n pour $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 3. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ associés aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. $\mathbf{C}^3$ est muni de sa base canonique e ; soit $k \in \mathbf{C}$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ de matrice A dans la base e :

$$A = \begin{pmatrix} 2i & -1 & i \\ -1 & k & -1 \\ i & 1 & 2i \end{pmatrix}.$$

Montrer que f admet une valeur propre indépendante de k ; déterminer les valeurs propres de f et ses sous-espaces propres. Pour quelle(s) valeur(s) de k l'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 6. Soient $Q \in \mathbf{R}_n[X]$ un polynôme fixé non constant et $f : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ l'application qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par Q.

a) Montrer que f est un endomorphisme.

b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 7. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Montrer que $f^2 = (\mathrm{Tr} f)f$. En déduire une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

Exercice 8. Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou gal deux, de base canonique $e = (e_0, e_1, e_2)$, où $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X$, $e_2(X) = X^2$. Soit u l'endomorphisme de E ainsi défini : pour $Q \in E$, $u(Q)(X) = (X + 3)\, Q'(X)$.

où Q' désigne le polynôme dérivé de Q.

a) Ecrire la matrice A de u dans la base e.

b) Sans calcul supplémentaire, dire pourquoi l'endomorphisme u est diagonalisable. Puis donner une base de diagonalisation de u.

Exercice 9. Résoudre le système différentiel :

$$x' = 2x + 3y - 3z, \qquad y' = -x + z, \qquad z' = -x + y.$$

Exercice 10. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u - \mathrm{id}_E$ soit de rang 1. Soient $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de l'hyperplan $H := \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$, et $e_n \notin H$.

a) Ecrire la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et en déduire que $u(e) - (\det u)e \in H$.

b) Montrer que $P(X) := (X-1)(X-\det u)$ est un polynôme annulateur de u et donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

Exercice 11. A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, calculer lorsqu'il existe l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$, où a, b sont des complexes.

Exercice 12. On considère un endomorphisme u *diagonalisable* de $\mathbf{C}^5$, dont les valeurs propres sont $-i$, 0, $+i$ et dont le polynôme caractéristique P_u a tous ses coefficients réels.

Donner la (ou les) expression(s) possible(s) pour le polynôme minimal m_u et le polynôme caractéristique P_u.

Exercice 13. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbf{K}$, et f, g deux endomorphismes de E.

a) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont mêmes valeurs propres.

b) Supposons que f et g commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$) et que g admet n valeurs propres distinctes. Montrer qu'alors f et g admettent une base propre commune.

Exercice 14. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, $a \in E$ un vecteur non nul, et φ une forme linéaire sur E, non nulle. On note f l'endomorphisme de E défini par $f(x) = \varphi(x)a$.

a) Quelles sont les valeurs propres de f ? Quand f est-il diagonalisable ?

b) Trouver un polynôme P de degré 2 tel que $P(f) = 0$.

Exercice 15. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbf{K}$ et p un projecteur de E.

a) Quelle équation doit vérifier toute valeur propre de p ?

b) Montrer que p est diagonalisable et que $E = \mathrm{Ker} p \oplus \mathrm{Im} p$.

Exercice 16. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trigonaliser A et B en précisant les matrices de passages. Déterminer leur polynôme minimal.