UPS, Licence L2 Mathématiques Mécanique

FEUILLE 1

Exercice 1.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer Ker f et calculer le déterminant de M.
b) Soient $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (0,1,-1)$, $u_3 = (1,1,1)$. Trouver la matrice de f dans la base $\varepsilon = (u_1, u_2, u_3)$.
c) On considère le plan $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z = 0\}$. Montrer que $f(P) = P$. On notera g la restriction de f à P. Montrer que (u_1, u_2) est une base de P et calculer les matrices de g et g^2 dans cette base.
d) Trouver un projecteur p et une homothétie h telles que $f^2 = p \circ h$. *On rappelle qu'un projecteur est un endomorphisme p tel que $p \circ p = p$.*

Exercice 2.
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$) défini par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= -4e_2 - 2e_3 \\ f(e_3) &= 4e_1 + 12e_2 + 5e_3 \end{aligned}$$

a) Déterminer Ker f.
b) Trouver une base Im f. A quelle relation doivent satisfaire les coordonnées d'un point générique (a,b,c) pour qu'il appartienne à Im f ?
c) On considère la base $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (-4,3,2)$, $\varepsilon_2 = (-4,0,1)$, $\varepsilon_3 = (2,1,0)$. Chercher la matrice de passage entre e et ε. En déduire la matrice de f dans ε.
d) Chercher les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. Retrouver la matrice de f dans la base ε.

Exercice 3.
Soient $u = (1,1,0)$, $v = (0,1,1)$, $w = (1,0,1)$.
a) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f(u) = (-1,4,0),\ f(v) = (2,10,9)\ f(w) = (5,-2,9).$$

b) Soit $g(x) = (x - 2y + 4z, -4x + 8y + 2z, 9z)$. Déduire de a) que $f = g$.
c) En déduire la matrice de f dans la base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
d) Déterminer Ker f et en donner une base.
e) Chercher une base de Im f et en déduire son équation.
f) En déduire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ et que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = 2e_1 + e_2$, $\varepsilon_2 = e_1 - 4e_2$, $\varepsilon_3 = 2e_2 + e_3$ forme une base adaptée à cette décomposition.
g) Chercher les matrices de passage entre les bases e et ε. En déduire la matrice de f dans ε.
h) Déduire directement de c) les valeurs propres et sous-espaces propres de f et retrouver ainsi la conclusion de g).

Exercice 4.
On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = \int_0^1 P(x)dx$ pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

a) Montrer que f est une forme linéaire. Donner les dimensions de son noyau et de son image.
b) Montrer qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$f(P) = aP(0) + bP'(0) + cP''(0) + dP^{(3)}(0).$$

Déterminer une base de Ker f.

Exercice 5.
Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\ell : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $\ell(P) = (P(0), P'(0), P(1))$.
a) Montrer que ℓ est linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques de E et $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer Ker ℓ et Im ℓ et retrouver le théorème du rang. Peut-on parler de somme directe de Ker ℓ et Im ℓ ?
c)Soit F le plan vectoriel de E engendré par 1 et X^2. Donner une base de $\ell(F)$. Discuter en fonction de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de la résolution de l'équation $\ell(P) = (x, y, z)$, $P \in F$.

Exercice 6.
Soient $A \in \mathcal{M}(n_1, n_1)$, $B \in \mathcal{M}(n_1, n_2)$, $C \in \mathcal{M}(n_2, n_1)$, $D \in \mathcal{M}(n_2, n_2)$ avec A inversible. Trouver des matrices X_1, X_2, M_1, M_2 telles que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ X_1 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & X_2 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Quelle formule sur les déterminants peut-on déduire de cette décomposition ? Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

Exercice 7.

Soit $D_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

a) Soit $P(X) = D_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, X)$. Montrer que $P(X)$ est un polynôme de degré $\leq n-1$, admettant $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ pour racines, et de coefficients dominant égal à $D_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. En déduire P.
b) En déduire par récurrence sur n l'expression de $D_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en fonction des α_i.
c) En déduire que ce déterminant est $\neq 0$ si et seulement si les α_i sont distincts deux à deux.