Examen de l'Algèbre Linéaire
L2 en Mathématiques Fondamentales
Université Paul Sabatier, 06/2011
Solutions et Indications.

Exercice 1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

i) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme $P_A(\gamma) = \det(A - \gamma \mathbb{I}_3)$. Ici on a 3 valeurs propres: $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3$.

ii) A est diagonalisable car ses valeurs propres sont distinctes. La diagonalisée de A est $D = diag(1, 2, 3)$. Il faut encore trouver la matrice de passage. Pour cela on cherche les vecteurs propres de A, c'est à dire des vecteurs $v_i \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient les équations $Av_i = \gamma_i v_i$, $i = 1, 2, 3$. Solutions:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ou leurs mutiples).

On peut mettre les trois vecteurs propres v_1, v_2, v_3 ensemble pour former la matrice de passage:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ - & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et on a $A = CDC^{-1}$

iii) On peut ecrire le système différentiel sous forme $X' = AX$ avec $X = (x, y, z)^T$. Metton $Z = C^{-1}X$, on obtient l'équation $Z' = DZ$, et $X = CZ$. Comme $D = diag(1, 2, 3)$, la solution générale de l'équation $Z' = DZ$ est $Z = (\alpha_1 e^t, \alpha_2 e^{2t}, \alpha_3 e^{3t})^T$, et la solution générale de $X' = AX$ est:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ - & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 e^t \\ \alpha_2 e^{2t} \\ \alpha_3 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{2t} - \alpha_3 e^{3t} \\ \alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{2t} - \alpha_3 e^{3t} \\ -\alpha_1 e^t - \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Montrer que

$$|3a + 4b + 5c| \le 5\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Appliquer l'inégalité de Cachy-Schwarz aux vecteurs $(3,4,5)$ et (a,b,c) dans $\mathbb{R}^3$ avec la métrique euclidienne canonique. On a égalité ssi les deux vecteurs sont colinéaires.

Exercice 3. i) Montrer que $\phi(P,Q) := P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} + P(i)\overline{Q(i)}$ est un produit hermitien sur $E = \mathbb{C}_2[X]$.

La vérification est directe et facile. Il ne faut pas oublier de vérifier la positivité du produit: si $P \neq 0$ alors $\phi(P,P) > 0$.

ii) Trouver un base orthonormale (G_0, G_1, G_2) telle que $\deg G_k = k$ pour $k = 0,1,2$.

Utiliser Gram-Schmidt.

On commence avec la base $F_0 = 1, F_1 = X, F_2 = X^2$. On a $\phi(F_0,F_0) = 3, \phi(F_1,F_0) = 1+i$. Donc on peut mettre $H_0 = 1, H_1 = 3F_1-(1+i)F_0 = 3X-(1+i)$ et on aura $\phi(H_1,H_0) = 0$.

On a $\phi(F_2,H_0) = 0, \phi(F_2,H_1) = 3\phi(X^2,X) = 3(1+i)$, $\phi(H_1,H_1) = 12$ donc on peut mettre $H_2 = (12/3(1+i))F_2 - H_1 = 2(1-i)X^2 - 3X + (1+i)$. Alors (H_0,H_1,H_2) est une base orthogonale.

Pour obtenir une base orthonormale, il faut encore diviser les vecteurs H_0, H_1, H_2 par leur normes. Donc on peut mettre: $G_0 = H_0/\|H_0\| = 1/\sqrt{3}$, $G_1 = H_1/\|H_1\| = (3X-1-i)/\sqrt{12}$, $G_2 = H_2/\|H_2\| = (2(1-i)X^2 - 3X + 1 + i)/2$.

Barème: Exo 1 = 11 (4 (valeurs propres) + 1 (diagonalisée) + 3 (matrice de passage) + 3 (solution du système diff.)), Exo 2 = 3, Exo 3 = 8 (4+4).