L 2 Math-Méca Algèbre linéaire et bilinéaire - 2010-2011

DEVOIR 1

A remettre avant le 12 octobre 2010.

Exercice 1. Soit $(a_n)_n$ la suite réelle définie par $a_0 = 1$, $a_1 = -\sqrt{3}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \begin{cases} a_{2n+1} &= 3a_{2n} + 3a_{2n-1} \\ a_{2n} &= a_{2n-1} + 3a_{2n-2} \end{cases} .$$

1. On note $X_n = \begin{pmatrix} a_{2n} \\ a_{2n+1} \end{pmatrix}$; trouver une matrice carrée A telle que $X_{n+1} = AX_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Diagonaliser A, puis calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$ (avec la convention $A^0 = I_2$).
(*Pour alléger les notations, on posera* $\delta = 3 - \sqrt{3}$ *et* $\sigma = 3 + \sqrt{3}$).

3. Déduire de ce qui précède l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. On notera Id l'identité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $\{Id, f, \ldots, f^{n-1}\}$ est libre dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$

(ii) il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ engendre $\mathbb{R}^n$

(iii) les valeurs propres de f sont simples.

Exercice 3.

1. A (respectivement B) est une matrice à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, carrée d'ordre m (respectivement d'ordre n).
On considère la matrice carrée d'ordre $m + n$ et diagonale par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \overset{notation}{=} diag(A, B)$$

(a) Quelle relation y a-t-il entre les polynômes caractéristiques π_M, π_A et π_B des matrices M, A et B ?

(b) Calculer M^s, pour $s \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que pour tout polynôme P de $K[X]$, l'on a $P(M) = diag\big(P(A), P(B)\big)$.

(c) Montrer que le polynôme minimal m_M de M est le *ppcm* des deux polynômes minimaux m_A et m_B de A et B respectivement. Est-ce en contradiction avec le résultat du 1.(a) ?

2. Généraliser les résultats de 1.(a) et 1.(c) lorsque $M = diag(A_1, \ldots, A_k)$, où A_1, …, A_k sont des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_k$.

3. Application : trouver le polynôme minimal de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

La matrice est-elle diagonalisable ?