Devoir Maison No. 2, Algèbre Linéaire, Licence L2, UPS, 2010-2011.

Exercise 1 (Somme des carrés des coefficients). Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, et soit $\phi \in End(E)$.

1) Montrer que, si (e_i) et (f_k) sont deux bases orthonormales de E, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \|\phi(e_i)\|^2 = \sum_{i=k}^{n} \|\phi^*(f_k)\|^2.$$

(Indication: utiliser la formule $\|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2 = \sum_k \langle x, f_k \rangle^2$).

2) En déduire que la quantité $\sum_{i=1}^{n} \|\phi(e_i)\|^2$ est indépendante de la base orthonormale choisie.

3) Soit $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$ une matrice réelle symétrique, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, comptés avec leur multiplicité. Montrer que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{i=k}^{n} \lambda_k^2.$$

Exercise 2 (Décomposition polaire). Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien. Un endomorphisme symétrique ϕ de E est dit *défini positif* si pour tout $x \in E, x \neq 0$ on a $\langle, \phi(x), x \rangle > 0$. Notons $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismses définis positifs.

1) Soit $\phi \in S(E)$. Montrer que $\phi \in S^{++}(E)$ si et seulement si toutes les valeurs propres de ϕ sont strictement positives.

2) Soient $\phi \in S^{++}(E)$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ ses valeurs propres positives distinctes, et $E_i = \ker(\phi - \gamma_i Id_E)$. On définit $\psi_i(x) = \sqrt{\gamma_i} x$ si $x \in E_i$ et $\psi_i(x) = 0$ si $x \in E_i^{\perp}$. On note enfin $\psi = \psi_1 + \ldots + \psi_p$. Montrer que $\psi^2 := \psi \circ \psi = \phi$, et que ψ est symétrique défini positif.

3) Soit ζ un autre endomorphisme symétrique défini positif de E tel que $\zeta^2 = \phi$.

a) Montrer que $\zeta\psi = \psi\zeta$.

b) En déduire que $\zeta(E_i) = E_i$ pour tout $i = 1, \ldots, p$.

c) Montrer que la restriction de ζ sur E_i coincides avec la restriction de ψ sur E_i.

d) En déduire que $\zeta = \psi$ (c.a.d., tout morphisme symétrique défini positif admet une unique *racine carrée* dans $S^{++}(E)$)

4) Soit $f \in GL(E)$ (c.à.d. $f \in End(E)$ inversible).

a) Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$

b) Soit g la racine carrée de $f^* \circ f$ dans $S^{++}(E)$. Montrer que $f \circ g^{-1} \in O(E)$.

c) En déduire que tout endomorphisme inversible f de E se factorise de façon unique comme composition d'un endomorphisme orthogonal de E avec un endomorphisme symétrique défini positif de E: il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$. (Cette factorisation s'appelle la *décomposition polaire* de f).

5) Soit $E = \mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire canonique. Calculer la décomposition polaire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice suivante (dans la base canonique):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$