UPS, Licence L2 Mathématiques, 2012-2013
Math 3 - Algèbre Linéaire et Bilinéaire

Devoir Maison No. 1

Exercise 1 Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Trigonaliser M en précisant une matrice de passage. Déterminer son polynôme minimal.

Exercise 2 Soit $A \in Mat_{\mathbb{R}}(8,8)$ telle que :

$P_A(x) = (-1-x)(1-x)^3(3-x)^4$ et $P_A^{min}(x) = (-1-x)(1-x)(3-x)^2$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Que peut-on dire des dimensions des espaces propres ?

Exercise 3 Soit $A \in Mat_{\mathbb{R}}(n,n)$ une matrice nilpotente. Montrer que $\mathbb{I}_n - A$ est inversible et

$$(\mathbb{I}_n - A)^{-1} = \mathbb{I}_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1},$$

où k est le plus petit nombre naturel tel que $A^k = 0$.

Exercise 4 Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

est inversible. À l'aide du Théorème de Cayley-Hamilton, calculer M_α^{-1} lorsqu'il existe.

Exercise 5 Trouver le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice :

$$Z = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(à rendre le 26/10/2012)

SOLUTIONS

Exercise 1 On a $P_M(x) = \det(M - x\mathbb{I}) = (2-x)(x^2 - x - 38) = (2-x)(\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)$, où $\lambda_1 = \frac{1+3\sqrt{17}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-3\sqrt{17}}{2}$.

Il y a 3 valeurs propres distinctes donc $P_M^{min}(x) = P_M(x) = (2-x)(x^2 - x - 38)$ et M est diagonalisable.

$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4-2 & 5 & 6 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 3 & 2 & 5-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$.

$v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4-\lambda_1 & 5 & 6 \\ 0 & 2-\lambda_1 & 0 \\ 3 & 2 & 5-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow v_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4+\lambda_1}{6} \end{pmatrix}$.

$v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4-\lambda_2 & 5 & 6 \\ 0 & 2-\lambda_2 & 0 \\ 3 & 2 & 5-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow v_3 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4+\lambda_2}{6} \end{pmatrix}$.

Donc on a

$$M = C \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} C^{-1}$$

avec la matrice de passage

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 0 \\ -9 & \frac{4+\lambda_1}{6} & \frac{4+\lambda_2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 0 \\ -9 & \frac{2+\sqrt{17}}{4} & \frac{2-\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$$

Exercise 2

$P_A(x) = (-1-x)^{s_1}(1-x)^{s_2}(3-x)^{s_3}$ et $P_A^{min}(x) = (-1-x)^{m_1}(1-x)^{m_2}(3-x)^{m_3}$,

où $s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 4, m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 2$.

a) La matrice A n'est pas diagonalisable car $m_3 = 2 > 1$.

b) Que peut-on dire des dimensions des espaces propres ?

$\dim E_{-1} = s_1 = 1$ car $m_1 = 1$;

$\dim E_1 = s_2 = 3$ car $m_2 = 1$;

$\dim E_3 < s_3 = 4$ car $m_3 = 2 > 1$;

La taille maximale des blocs Jordans qui ont la valeur propre 3 est $m_3 = 2$, et la taille totale de ces blocs est $s_4 = 4$, donc on a seulement 2 possibilités pour les blocs de Jordan de valeur propre 3 dans la forme normale de Jordan de M :

i) Soit il y a deux blocs de taille 2, dans ce cas $\dim E_3 = 2$.

ii) Soit il y a 1 bloc de taille 2 et 2 blocs de taille 1, dans ce cas $\dim E_3 = 3$. (La dimension de l'espace propre d'une valeur propre γ est égale au nombre de blocs de Jordan de valeur propre γ dans la forme normale de Jordan).

Exercise 3 Nous avons

$$(\mathbb{I}_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})(\mathbb{I}_n - A) \quad = \mathbb{I}_n - A^k = \mathbb{I}_n$$

donc

$$(\mathbb{I}_n - A)^{-1} = \mathbb{I}_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

Exercise 4 On a $\det M_\alpha = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha$, donc la matrice M_α est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$.

En plus,

$$\begin{aligned} \det(M_\alpha - x\mathbb{I}_3) &= (1-x)^2(\alpha - x) \\ &= -[x^3 - (\alpha+2)x^2 + (2\alpha+1)x - \alpha] \end{aligned}$$

Théorème de Cayley-Hamilton $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & M_\alpha^3 - (\alpha+2)M_\alpha^2 + (2\alpha+1)M_\alpha - \alpha\mathbb{I}_3 = 0 \\ & \Rightarrow M_\alpha[M_\alpha^2 - (\alpha+2)M_\alpha + (2\alpha+1)\mathbb{I}_3] = \alpha\mathbb{I}_3 \\ & \Rightarrow M_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}[M_\alpha^2 - (\alpha+2)M_\alpha + (2\alpha+1)\mathbb{I}_3] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha}[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3+3\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} - (\alpha+2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} + (2\alpha+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha+3 & -3 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercise 5 On a

$$P_Z(x) = \det(Z - x\mathbb{I}_8) = \begin{vmatrix} 3-x &&&&&&& \\ & 3-x & 2 &&&&& \\ & 0 & 3-x &&&&& \\ &&& 4-x & 5 &&& \\ &&& 6 & 7-x &&& \\ &&&&& 3-x & -1 & 0 \\ &&&&& 0 & 3-x & -1 \\ &&&&& 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)^3 \begin{vmatrix} 4-x & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x)^6 \begin{vmatrix} 4-x & 5 \\ 6 & 7-x \end{vmatrix}$$

$$= (x-3)^6(x^2 - 11x - 2) = (x-3)^6\left(x - \frac{11+\sqrt{129}}{2}\right)\left(x - \frac{11-\sqrt{129}}{2}\right)$$

Donc $P_Z^{min}(x) = (x-3)^m(x^2-11x-2)$ où $1 \leq m \leq 6$. On peut montrer que $m = 3$ (c'est la taille maximale des blocs Jordan qui ont la valeur propre 3), donc

$$P_Z^{min}(x) = (x-3)^3(x^2 - 11x - 2)$$