UPS, Licence MIA Math-Méca 3ème semestre, TD d'algèbre linéaire,
Feuille 5 (novembre 2008)

Exercice 1.

a) Montrer que $< P, Q >= \int_0^\infty e^{-t}P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_2[X]$ (l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2).

b) Donner la matrice de ce produit scalaire dans la base $1, X, X^2$.

c) Trouver a tel que $\int_0^\infty e^{-t}(t-a)^2dt$ soit minimal.

Exercice 2. Soit $C([0,1])$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Soit $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$, $\forall f, g \in C([0,1])$. Montrer que c'est un produit scalaire sur $C([0,1])$. Trouver le projeté orthogonal de la fonction e^t sur le sous-espace vectoriel engendré par 1 et t.

Exercice 3. On munit $\mathbf{R}^4$ de sa structure euclidienne usuelle. Trouver une base orthonormale du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,2,3,0)$, $v_3 = (0,0,4,1)$.

Exercice 4. Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien. Etant donnés un vecteur non nul u de E et un réel λ, on pose $f(x) = x + \lambda < x, u > u$, $\forall x \in E$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Trouver les $\lambda \in \mathbf{R}$ tels que f soit orthogonal.

c) On suppose $\lambda \neq 0$ et f orthogonal.

   i) Calculer $f(u)$.

   ii) Calculer $f(x)$ pour $x \perp u$.

   iii) Diagonaliser f.

Exercice 5. Dans un espace euclidien E de dimension 4 muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$U := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que u est un élément du groupe orthogonal $O(E)$.

b) Calculer la trace et le déterminant de u.

c) Montrer que 1 est valeur propre de u et déterminer le sous-espace propre correspondant.

d) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de u.

e) Soient $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $G = F^{\perp}$. Montrer que $u(G) = G$. Préciser les restrictions de u à F et G.

Exercice 6. Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, on considère l'application linéaire f de matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soit $V = U/3$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de V.

b) Montrer que V est diagonalisable, donner ses valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres correspondants.

c) Montrer que f est la composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ que l'on déterminera.

Exercice 7. Soit l'espace euclidien orienté usuel $\mathbf{R}^3$ (la base canonique est donc orthonormée directe). Caractériser les endomorphismes u_i dont les matrices dans cette base sont :

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, M_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, muni du produit scalaire $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ $(\forall P, Q \in E)$. Soit $\Phi : E \to E, P(X) \mapsto P(-X)$.

a) Montrer que Φ est une application linéaire autoadjointe.

b) Trouver une base orthonormale propre pour Φ.