UPS, Licence MIA Math-Méca 3ème semestre, TD d'algèbre linéaire,
Feuille 4 (novembre 2008)

Exercice 1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel V.

a) On suppose que f annule les polynômes X^2+X et X^2-X. Montrer que $f=0$.

b) On suppose que f annule les polynômes X^5-1 et X^2-2X+1. Montrer que $f=\mathrm{id}_V$.

c) On suppose que f annule les polynômes X^3-X, X^3-2X^2+X et X^3-X^2-X+1. Montrer que $f=\mathrm{id}_V$.

Exercice 2. Soient V un $\mathbf{R}$-e.v. et $f\in\mathcal{L}(V)$ tel que $f\circ f-3f+2\mathrm{id}=0$.

a) Montrer que f est diagonalisable.

b) Montrer que f est un isomorphisme.

c) Calculer f^{-1} en fonction de f.

d) Calcuer f^3 en fonction de f.

e) Peut-on calculer f^n en fonction de f ?

Exercice 3. Résoudre le système différentiel (S) : $\begin{cases} x'=x-y+3z \\ y'=-2x+2y+2z \\ z'=-x+y+5z \end{cases}$ où les inconnues sont les fonctions $x,y,z:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

Exercice 4. Soient V un e.v. de dimension n, $f\in\mathcal{L}(V)$, m son polynôme minimal et P son polynôme caractéristique. (Rappel : m divise P et P divise m^n). On suppose f nilpotent.

a) Préciser dans ce cas m et P.

b) Montrer que si f est diagonalisable, alors $f=0$.

Exercice 5. Soit $(V,<\ ,\ >)$ un espace euclidien (non réduit au vecteur nul). On pose $\varphi(x,y)=a<x,x>+b<x,y>+c<y,y>$. Pour quelles valeurs de $a,b,c\in\mathbf{R}$ φ est-elle un produit scalaire sur E ?

Exercice 6. Soient $a,b,c\in\mathbf{R}$.

a) Montrer que $|6a+3b+2c|\le 7\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Quand a-t-on égalité ?

b) Montrer que $2a+3b+4c\le\sqrt{29(a^2+b^2+c^2)}$. Quand a-t-on égalité ?

c) Montrer que $a+b+c\le 7\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Quand a-t-on égalité ?

d) Montrer que $3a+4b\le 5\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 7. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ t.q. $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1$.

a) Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq n^2$.
(indication : on pourra écrire $n = \sum \sqrt{a_i}.\frac{1}{\sqrt{a_i}}$).

b) Quand a-t-on égalité ?

c) Que peut-on dire si les a_i ne sont plus supposés positifs ?

Exercice 8. Soient E euclidien et $u : E \to E$ une application vérifiant $u(0) = 0$ et $\forall x, y \in E \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$.

a) Montrer que $\forall x, y \in V < u(x), u(y) >=< x, y >$.

b) Montrer que u est linéaire.

c) Montrer que u est injective.

d) Si E est de dimension finie, montrer que u est surjective.

e) Montrer (par un contre-exemple de dimension infinie) que u peut ne pas être surjective.

Exercice 9. Pour $P, Q \in E := \mathbf{R}_n[X]$ on pose $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

a) Montrer que cette formule définit un produit scalaire sur E.

b) Calculer la norme d'un polynôme $P \in E$ en fonction de ses coefficients.

c) Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans le cas $n = 2$.

d) Soit f la forme linéaire sur E définie par $f(P) = P(1/3)$. Démontrer qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $\forall P \in E, f(P) =< P, Q >$.

e) Pour $n = 1, 2, 3$, calculer Q.

Exercice 10. Soient E un espace euclidien, F un sous-espace, $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée de F, p la projection orthogonale sur F, q celle sur $F^\perp$, s la symétrie orthogonale par rapport à F, t celle par rapport à $F^\perp$.

a) Montrer que $\forall x \in E$, $p(x) = \sum_{i=1}^m < x, e_i > e_i$, puis exprimer de même q, s, t.

b) Pour $E = \mathbf{R}^3$ euclidien et $F =$ le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$, donner dans la base canonique les matrices de p et s.