UPS, Licence MIA Math-Méca 3ème semestre, TD d'algèbre linéaire, Feuille 3 (octobre 2008)

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

a) En diagonalisant A.

b) En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton et en calculant le reste $R_n(X)$ de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Calculer A^k (pour tout $k \in \mathbf{N}^*$) en mettant A sous forme de Dunford.

Exercice 3. Déterminer les valeurs des scalaires a, b, c pour lesquels A (respectivement, B) est diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}), \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C}).$$

Exercice 4. Pour chacune des suites suivantes (définies par récurrence), calculer u_n en fonction de n :

a) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n$.

b) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}$ et $u_{2n} = u_{2n-1} + 2u_{2n-2}$.

c) $u_0 = \alpha > 0$, $u_1 = \beta > 0$, et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = \frac{2}{\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}}$.

Exercice 5. Pour chacune des matrices ci-dessous, calculer le polynôme minimal et les sous-espaces caractéristiques. Donner une matrice réduite triangulaire en précisant la matrice de passage :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système différentiel linéaire $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 6. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et φ un endomorphisme non nul de E tel que $\varphi^3 + \varphi = 0$.

a) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$.

b) Prouver que $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi^2 + \mathrm{id}_E)$.

c) Démontrer que pour tout $v \notin \mathrm{Ker}\varphi$, le couple $(v, \varphi(v))$ est libre.

d) Que peut-on dire du polynôme minimal $m(X)$ de φ ?

e) Si $dim(E) = 2$, prouver l'existence d'une base dans laquelle la matrice de φ est $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donner $m(X)$.

f) Si $dim(E) = 3$, prouver que $\mathrm{Ker}\varphi$ est de dimension 1. En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de φ est (par blocs) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$. Trouver $m(X)$.

Exercice 7. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E défini dans une base (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) u est-il diagonalisable ? triangularisable ?

b) Calculer les sous-espaces caractéristiques F_1 et F_2. Donner pour $k = 1, 2$ l'ordre β_k du nilpotent $(u - k\mathrm{id}_E)_{|F_k}$.

c) Monter que pour tout $v \in F_2 \backslash \mathrm{Ker}((u - 2\mathrm{id}_E)^{\beta_2 - 1})$, les m_2 vecteurs suivants forment une base de F_2 :

$$f_{\beta_2} = v, f_{\beta_2 - 1} = (u - 2\mathrm{id})(v), \ldots, f_1 = (u - 2\mathrm{id})^{\beta_2 - 1}(v).$$

d) On note $F = (f_1, \ldots, f_4)$ la complétée de la base précédente par une base de F_1. Vérifier que la matrice T de u dans F est triangulaire. Donner sa décomposition de Dunford. Calculer T^5.

Exercice 8. Soit f un endomorphisme de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base (u_1, u_2, u_3, u_4) d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.

a) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de f. Donner le polynôme minimal de M.

b) Déterminer "la" matrice réduite de Jordan J de M et préciser une matrice de passage.

Exercice 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$. En discutant suivant les valeurs de α, donner une réduite de Jordan ainsi qu'une matrice de passage.