UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

ALGÈBRE LINÉAIRE

ET

BILINÉAIRE

(Résumé de cours)

Claude WAGSCHAL

Avertissement

Ce texte est un résumé du cours d'algèbre linéaire et bilinéaire de la Licence (L2). Ce texte ne comporte aucune démonstration.

Chapitre 1

Rappels et Notations

1.1 Espaces vectoriels

Tous les espaces vectoriels seront des espaces vectoriels (en abrégé e.v.) sur un corps $\mathbb{K}$ qui sera soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Si E est un e.v., un sous-espace vectoriel (en abrégé s.e.v.) est une partie non vide $F \subset E$ stable par les opérations de E, c'est-à-dire

$$(x, y) \in F \times F \Rightarrow x + y \in F \text{ et } (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F \Rightarrow \lambda x \in F.$$

L'addition (resp. la multiplication par les scalaires) par restriction à $F \times F$ (resp. $\mathbb{K} \times F$) définissent une structure vectorielle sur F.

Si B est une partie de E, il existe un plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant B, appelé sous-espace vectoriel engendré par B que nous noterons $s.e.v.(B)$. Ce sous-espace vectoriel coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de B.

Une partie B de E est dite libre si pour toute famille finie $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments distincts de B et toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i \in I.$$

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est libre si, pour toute partie finie

J de I et toute famille $(\lambda_i)_{i\in J}$ de scalaires

$$\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i \in J.$$

Ceci signifie que les x_i sont distincts et que la partie $\bigcup_{i\in I}\{x_i\}$ est libre.

On dit qu'une partie B de E engendre E, ou que B est une partie génératrice, si tout $x \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de B, soit

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \text{ où } I \text{ est un ensemble fini, } x_i \in B,\ \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Une partie libre qui engendre l'espace E est appelée une base de E.

Si un e.v. admet une base finie admettant n éléments, toute autre base est finie et admet n éléments. Cet entier n est alors appelé la dimension de E, il sera noté dim $_{\mathbb{K}}E$ ou simplement dim E s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps. Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ [on notera que nous avons ordonné les vecteurs de base, ceci est essentiel pour l'écriture matricielle des applications linéaires] est une base d'un espace de dimension n, tout x de E s'écrit d'une seule façon

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ où } x_i \in \mathbb{K}.$$

Dans un e.v. de dimension n, toute partie libre admet au plus n éléments ; toute partie libre admettant n éléments est une base et toute partie libre est contenue dans une base (théorème de la base incomplète).

Si un e.v. E admet une partie génératrice finie M, alors E est de dimension finie et M contient une base de E. De plus, si E est de dimension finie n, toute partie génératrice admet au moins n éléments et c'est une base si elle admet exactement n éléments.

Tout sous-espace vectoriel F d'un e.v. E de dimension finie est de dimension finie et dim $F \leq$ dim E ; de plus,

$$E = F \Longleftrightarrow \text{dim } E = \text{dim } F.$$

1.2 Application linéaire

Étant donné deux e.v. E et F, on note $\mathcal{L}(E; F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Lorsque $E = F$, une aplication linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme de E et on pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E; E)$.

Rappelons qu'une algèbre A est un e.v. muni d'une loi de composition interne $(x, y) \mapsto xy$ associative et bilinéaire. Une algèbre est dite unitaire s'il existe un élément $e \in A$ tel que $ex = xe = x$ pour tout $x \in A$. Par exemple, $\mathcal{L}(E)$ est pour la composition des endomorphismes une algèbre unitaire ($e = I_E$) non commutative si dim $E \geq 2$.

Soit $T \in \mathcal{L}(E; F)$, on définit le noyau et l'image de T par

$$\text{Ker } T = T^{-1}(0) = \{x \in E\,;\, Tx = 0\} \text{ et Im } T = T(E).$$

Ce sont des s.e.v. de E et F respectivement et l'application T est injective si, et seulement si, son noyau est réduit à 0.

Si $T \in \mathcal{L}(E;F)$ est une bijection linéaire, la bijection réciproque $T^{-1} : F \to E$ est linéaire ; on dit que T est un isomorphisme et que les espaces E et F sont isomorphes. Lorsque $E = F$, on parle d'automorphisme.

Si E et F sont isomorphes et si E est de dimension finie, alors F est de dimension finie et dim $E =$ dim F. Tout e.v. de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Soit $T \in \mathcal{L}(E;F)$ où E et F sont de dimension finie, alors

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T.$$

Si, de plus, E et F sont de même dimension, on a les équivalences

$$T \text{ est injective } \Leftrightarrow T \text{ est surjective } \Leftrightarrow T \text{ est un isomorphisme.}$$

1.3 Représentation matricielle

Soient E et F deux e.v. de dimension finie, on pose

$$q = \dim E \text{ et } p = \dim F.$$

Soient $B_E = (e_1, \ldots, e_q)$ et $B_F = (f_1, \ldots, f_p)$ des bases de E et F et soit $T \in \mathcal{L}(E;F)$. On pose

$$Te_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i, \; a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Si $x = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j \in E$, on a alors

$$Tx = \sum_{i=1}^{p} y_i f_i \text{ où } y_i = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} x_j.$$

La matrice

$$A_T = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

est une matrice de type (p,q), c'est-à-dire à p lignes et q colonnes, dite matrice représentative de T dans les bases B_E et B_F. On notera $M_{p,q}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de type (p,q). L'application $T \mapsto A_T$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E;F)$ sur $M_{p,q}(\mathbb{K})$. Si G est un troisième e.v. de dimension finie muni d'une base B_G et si $S \in \mathcal{L}(F;G)$, on a alors

$$A_{S \circ T} = A_S A_T \text{ (produit des matrices représentatives).}$$

Lorsque E est un espace de dimension finie n muni d'une base B_E, la matrice représentative d'un endomorphisme de E est une matrice carrée de type (n,n) ; l'espace $M_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices carrées est une algèbre unitaire, l'élément unité, noté I_n, est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux valent 1 et l'application $A \in \mathcal{L}(E) \mapsto A_T \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'algèbre. L'ensemble

$GL(E)$ des automorphismes de E est un groupe pour la composition des applications qu'on appelle le groupe linéaire de E ; de même l'ensemble $GL(n;\mathbb{K})$ des matrices $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ inversibles est un groupe pour le produit des matrices et l'application $A \in GL(E) \mapsto A_T \in GL(n;\mathbb{K})$ est un homomorphisme de groupe.

Revenons à la situation envisagée au début de ce paragraphe et considérons deux autres bases $B'_E = (e'_1, \dots, e'_q)$ et $B'_F = (f'_1, \dots, f'_p)$ de E et F repectivemen. On appelle matrice de passage de la base B_E (dite ancienne base) à la base B'_E (dite nouvelle base) la matrice représentative de l'application $I_E : (E, B'_E) \to (E, B_E)$. Si $Q = (q_{ij})_{1\leq i,j\leq q}$ désigne cette matrice, on a par définition

$$e'_j = \sum_{i=1}^{q} q_{ij} e_i.$$

On retiendra que les vecteurs colonnes de la matrice de passage sont les coordonnées dans l'ancienne base des vecteurs de la nouvelle base. Rappelons que cette matrice Q est inversible, soit $Q \in GL(q;\mathbb{K})$, la matrice inverse étant la matrice de passage de la base B'_E à la base B_E. On définit de même la matrice de passage $P \in GL(p;\mathbb{K})$ de la base B_F à la base B'_F. Notons A et A' les matrices représentatives de $T \in \mathcal{L}(E;F)$ dans les bases B_E, B_F et B'_E, B'_F respectivement. On a alors la relation

$$A' = P^{-1}AQ.$$

Deux matrices $A, A' \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ liées par une telle relation où $P \in GL(p;\mathbb{K})$, $Q \in GL(q;\mathbb{K})$ sont dites équivalentes. Lorsque $E = F$ ($B_E = B_F$, $B'_E = B'_F$) la relation précédente s'écrit

$$A' = P^{-1}AP$$

et on dit que les matrices A et A' sont semblables. Ces relations sont des relations d'équivalence. La matrice repésentative d'un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ n'est donc définie qu'à une similitude près. Le problème étudié dans les chapitres suivants est de déterminer une base de E telle que la matrice repésentative de $T \in \mathcal{L}(E)$ soit aussi simple que possible.

1.4 Déterminants

Soit E un e.v. de dimension n muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$, alors il existe une unique forme n-linéaire alternée (ou antisymétrique) notée $\text{dét}_B : E^n \to \mathbb{K}$ telle que $\text{dét}_B(e_1, \dots, e_n) = 1$. Elle est donnée par la formule suivante. Soient $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j$ n vecteurs de E, alors

$$\text{dét}_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1\,\sigma(1)} \times \ldots \times x_{n\,\sigma(n)}$$

où S_n désigne le groupe symétrique, groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, et $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

On définit alors le déterminant d'un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\text{dét}\, T = \text{dét}_B(Te_1, \ldots, Te_n)\,;$$

ce scalaire ne dépend pas du choix de la base B. Les propriétés du déterminant sont supposées connues. Rappelons simplement qu'un endomorphisme T est un automorphisme si, et seulement si, dét $T \neq 0$ et que l'application dét : $GL(E) \to \mathbb{K}^*$ est un homomorphisme de groupe sur le groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$.

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ peut toujours être considérée comme la matrice représentative d'un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$; on définit alors le déterminant de A en posant dét $A =$ dét T. On vérifie que

$$\text{dét} A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \times \ldots \times a_{\sigma(n)\,n}$$

et ceci prouve que le scalaire détA ne dépend pas du choix de l'espace E et de la base de cet espace. Les règles usuelles de calcul des déterminants sont supposées acquises.

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

2.1 Valeur propre, vecteur propre

Soient E un e.v. de dimension $n \geq 1$, $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire, on pose

$$T_\lambda = T - \lambda I_E$$

et

$$E_\lambda = \text{Ker } T_\lambda = \{x \in E\,;\, Tx = \lambda x\}.$$

Alors, ou bien T_λ est un automorphisme, ou bien T_λ n'est pas injectif, c'est-à-dire $E_\lambda \neq \{0\}$. Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 2.1.1 *Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé une valeur propre de T si T_λ n'est pas injectif. Un vecteur $x \in E_\lambda$, $x \neq 0$, est appelé un vecteur propre associé à la valeur propre λ et E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. L'ensemble $\sigma(T) \subset \mathbb{K}$ des valeurs propres est appelé le spectre de T.*

Dire que λ est une valeur propre signifie donc que

$$P(\lambda) \equiv \text{dét } T_\lambda = \text{dét } (T - \lambda I_E) = 0.$$

Si $B = (e_1, \dots e_n)$ est une base de E et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice représentative de T dans cette base, on a

$$P(\lambda) = \text{dét}\,(A-\lambda I_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\big(a_{\sigma(1)\,1}-\lambda\delta_{\sigma(1)\,1}\big)\times\ldots\times\big(a_{\sigma(n)\,n}-\lambda\delta_{\sigma(n)\,n}\big)$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Ceci montre que P est un polynôme de degré n de la forme

$$P(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j\lambda^j,\ \alpha_j \in \mathbb{K}.$$

Ce polynôme s'appelle le polynôme caractéristique de l'endomorphisme T ; les scalaires α_j ne dépendent que de l'endomorphisme T. On a par exemple $\alpha_0 = \text{dét}\, T$ et on définit la trace de T par

$$\text{Tr}\, T = (-1)^{n-1}\alpha_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

Un endomorphisme T admet au plus n valeurs propres. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le théorème de D'Alembert permer d'affirmer qu'il existe exactement n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité. On a alors

$$P(\lambda) = (-1)^n\prod_{j=1}^{n}(\lambda-\lambda_j),$$

d'où

$$\text{dét}\, T = \prod_{j=1}^{n}\lambda_j,\ \text{Tr}\, T = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j.$$

Remarque 2.1.1 Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ peut être considérée comme la matrice représentative d'un unique endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $\mathbb{K}^n$ étant muni de sa base canonique, à savoir

$$T : x = (x_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{K}^n \mapsto \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n.$$

Les valeurs propres de A seront par définition les valeurs propres de T, etc. Dans la pratique, on notera encore A l'endomorphisme associé à la matrice A et on utilisera pour les matrices la même terminologie que pour les endomorphismes.

Une matrice à coefficients réels peut être considérée comme une matrice à coefficients complexes et il faut éventuellement préciser le corps. Par exemple, si on note $\sigma_{\mathbb{K}}(A)$ le spectre de A, on a

$$\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \sigma_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R}$$

et il faut bien distinguer le spectre réel et le spectre complexe.

Proposition 2.1.1 *Soient $\lambda_1 \dots, \lambda_p$ p valeurs propres distintes de $T \in \mathcal{L}(E)$ et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs propres associés à ces valeurs propres, alors la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre.*

Ceci peut être précisé comme suit.

Définition 2.1.2 *Soient E un e.v., E_1, ...,E_p des s.e.v., on définit la somme de ces sous-espaces vectoriels par*

$$F \equiv E_1 + \ldots + E_p = \sum_{i=1}^{p} E_i = \{x_1 + \ldots + x_p\,;\, x_i \in E_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p\}.$$

Alors, F est un s.e.v. de E et on dit que F est la somme directe des sous-espaces E_i si tout $x \in F$ s'écrit d'une seule manière

$$x = x_1 + \ldots + x_p \text{ où } x_i \in E_i.$$

On écrit alors

$$F = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i.$$

Dire que la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe signifie donc que

$$\forall x_i \in E_i,\, x_1 + \ldots + x_p = 0 \Longrightarrow x_i = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p.$$

On peut alors définir des projecteurs linéaires $p_i : F \to E_i$ en posant

$$p_i(x) = x_i \text{ si } x = x_1 + \ldots + x_p,\, x_j \in E_j.$$

Proposition 2.1.2 *Soient $\lambda_1 \ldots, \lambda_p$ p valeurs propres distintes de $T \in \mathcal{L}(E)$, alors la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ est directe.*

On utilisera ultérieurement la caractérisation suivante.

Proposition 2.1.3 *On suppose E de dimension finie, avec les notations de la définition 2.1.2 on a l'équivalence des propriétés suivantes*

1. la somme $F = \sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe,

2. soit $B_i = (e_{ij})_{1 \leq j \leq n_i}$, $n_i =$ dim E_i, une base de E_i, alors $B = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n_i}}$ est une base de F,

3. dim $F = \sum_{i=1}^{p}$ dim E_i.

2.2 Endomorphisme diagonalisable

Définition 2.2.1 *Un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable s'il existe une base de E telle que sa matrice représentative dans cette base soit diagonale. Une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Une matrice diagonale $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sera notée $A = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où $\lambda_i = a_{ii}$. Son polynôme caractéristique s'écrit

$$(-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i).$$

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 2.2.2 *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[\lambda]$ de degré n est dit scindé si*

$$P(\lambda) = a \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) \text{ où } a \in \mathbb{K}^* \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout polynôme est scindé (D'Alembert) ; il n'en est rien sur $\mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme diagonalisable est nécessairement scindé ; sur $\mathbb{R}$, on obtient ainsi une condition nécessaire pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, mais cette condition n'est pas suffisante.

Théorème 2.2.1 *(caractérisation des endomorphismes diagonalisables) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes d'un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *T est diagonalisable,*
2. *il existe une base de E constituée de vecteurs propres,*
3. *$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$,*
4. *dim $E = \sum_{i=1}^{p}$ dim E_{λ_i}.*

Corollaire 2.2.2 *Un endomorphisme admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension* 1.

Définition 2.2.3 *Un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ (resp. une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$) est dit nilpotent s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $T^k = 0$ (resp. $A^k = 0$). Le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $T^k = 0$ (resp. $A^k = 0$) est appelé l'indice de nilpotence de T (resp. A).*

On a alors la

Proposition 2.2.3 *Un endomorphisme nilpotent diagonalisable est nécessairement nul.*

Considérons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $A^2 = 0$; cette matrice est donc nilpotente, donc non diagonalisable, alors que son polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2$ est scindé.

Voici enfin une propriété concernant la dimension des sous-espaces propres qui permettra d'établir une autre caractérisation des endomorphismes diagonalisables.

Proposition 2.2.4 *Soient λ une valeur propre de T de multiplicité m, c'est-à-dire*

$$P(X) = (X - \lambda)^m Q(X) \text{ où } Q \in \mathbb{K}[X], Q(\lambda) \neq 0,$$

alors

$$\text{dim } E_\lambda \leq m.$$

En particulier, si λ est une valeur propre simple ($m = 1$), le sous-espace propre est de dimension 1.

Corollaire 2.2.5 *Un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé et si, pour toute valeur propre λ, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité de λ.*

Remarque 2.2.1 Pour calculer la dimension des sous-espaces propres, on peut utiliser la formule

$$\dim E_\lambda = n - r$$

où r est le rang de $T - \lambda I_E$; rappelons que, par définition, ce rang est la dimension de l'image de $T - \lambda I_E$.

Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé n'est pas nécessairement diagonalisable, mais nous allons montrer qu'il est toujours trigonalisable.

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si $a_{ij} = 0$ si $i > j$ (resp. $i < j$). On vérifie qu'une matrice triangulaire inférieure est toujours semblable à une matrice triangulaire supérieure ; nous raisonnerons donc avec des matrices triangulaires supérieures.

Définition 2.2.4 *Un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base de E pour laquelle la matrice représentative de T est triangulaire supérieure.*

On a alors la caratérisation suivante.

Proposition 2.2.6 *Un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.*

2.3 Polynômes d'endomorphisme

Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme à une indéterminée, on pose

$$P(T) = \sum_{j=0}^{m} a_j T^j \text{ si } P(X) = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j,\ a_j \in \mathbb{K}$$

où $T^0 = I_E$. On définit ainsi un endomorphisme $P(T) \in \mathcal{L}(E)$. On définit de même $P(A)$ si $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ est une matrice. On notera que, pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$(P+Q)(T) = P(T) + Q(T) \text{ et } (PQ)(T) = P(T) \circ Q(T) = Q(T) \circ P(T).$$

Théorème 2.3.1 *(Cayley-Hamilton) Soient $T \in \mathcal{L}(E)$, P son polynôme caractéristique, alors $P(T) = 0$.*

Corollaire 2.3.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *T est nilpotent,*
2. *toutes les valeurs propres de T sont nulles,*
3. *le polynôme caractéristique de T est $P(X) = (-1)^n X^n$.*

Le théorème de Cayley-Hamilton conduit à s'intéresser à l'ensemble des polynômes annulateurs de T, soit

$$\mathcal{Z} = \{P \in \mathbb{K}[X]\,;\ P(T) = 0\}.$$

On a alors la

Proposition 2.3.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique polynôme unitaire $m \in \mathcal{Z}$, $m \neq 0$, dit polynôme minimal de T, tel que*

$$1 \leq \textit{degré } m \leq \textit{degré } P \textit{ pour tout } P \in \mathcal{Z},\ P \neq 0.$$

De plus, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ appartient à $\mathcal{Z}$ si, et seulement si, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = mQ$.

Proposition 2.3.4 *L'ensemble des racines du polynôme minimal coïncide avec le spectre de T. Plus précisément, si λ est une valeur propre de multiplicité q, soit*

$$P(X) = (X - \lambda)^q Q(X),\ Q(\lambda) \neq 0,$$

alors

$$m(X) = (X - \lambda)^r R(X),\ R(\lambda) \neq 0 \textit{ et } 1 \leq r \leq q.$$

Corollaire 2.3.5 *Si le polynôme caractéristique de T est scindé, il en est de même du polynôme minimal.*

Le polynôme minimal va nous permettre de donner une nouvelle caractérisation des endomorphismes diagonalisables. Nous utiliserons le résultat suivant.

Théorème 2.3.6 *(lemme des noyaux) Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \times \ldots \times P_k$, alors*

$$\textit{Ker } P(T) = \bigoplus_{j=1}^{k} \textit{Ker } P_j(T).$$

Théorème 2.3.7 *Un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé et à racines simples.*

Corollaire 2.3.8 *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et F un s.e.v. de E stable par T, alors $T|_F \in \mathcal{L}(F)$ est un endomorphisme diagonalisable.*

Corollaire 2.3.9 *Si $T, T' \in \mathcal{L}(E)$ sont des endomorphismes diagonalisables qui commutent, alors $T + T'$ est un endomorphisme diagonalisable. Plus précisément, il existe une base de vecteurs propres communs.*

Exemple 2.3.1 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T^k = I_E$, $k \geq 1$, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors T est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines $k^{\text{ième}}$ de l'unité.

2.4 Sous-espaces caractéristiques

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, dans ce paragraphe on suppose son polynôme caractéristique scindé, soit

$$P(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i} \text{ où } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j.$$

D'après le lemme des noyaux, on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i \text{ où } C_i = \text{Ker } (T - \lambda_i I_E)^{m_i}.$$

Le s.e.v. C_i s'appelle le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i. On vérifie que

$$E_{\lambda_i} \subset C_i \text{ et } T(C_i) \subset C_i.$$

On peut donc définir des endomorphismes $T_i \in \mathcal{L}(C_i)$ en posant $T_i = T|_{C_i}$; notons P_i le polynôme caractéristique de T_i.

Choisissons une base B_i de C_i et soit A_i la matrice représentative de T_i dans cette base. Alors $B = (B_1, \ldots, B_p)$ est une base de E et la matrice représentative de T dans cette base est la matrice diagonale par blocs $A = \text{diag }(A_1, \ldots, A_p)$. Il en résulte que $P = \prod_{i=1}^{p} P_i$.

Lemme 2.4.1 *On a dim $C_i = m_i$ et $P_i = (-1)^{m_i}(X - \lambda_i)^{m_i}$.*

Remarque 2.4.1 Les polynômes P_i étant scindés, on peut choisir les bases B_i telles que les matrices A_i soient triangulaires supérieures, la matrice A est alors triangulaire supérieure. De plus, on observera que la matrice A_i s'écrit alors $A_i = D_i + N_i$ où $D_i = \text{diag }(\lambda_i, \ldots, \lambda_i)$ et N_i est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle, donc nilpotente d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Voici une application de ce qui précède à la résolution des relations de récurrence linéaires. On se donne un entier $k \geq 1$, des nombres complexes $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ où $\alpha_0 \neq 0$ et on cherche les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

(2.4.1) $\quad u_{n+k} = \alpha_{k-1}u_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 u_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Notons E l'espace de toutes les solutions de (2.4.1) ; E est un s.e.v. de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Définissons une application $f : \mathbb{C}^k \to E$: si $v = (v_j)_{0\leq j\leq k-1} \in \mathbb{C}^k$, on note $u = f(v) \in E$ la solution de (2.4.1) telle que $u_j = v_j$ pour $0 \leq j \leq k-1$. Alors, $f : \mathbb{C}^k \to E$ est un isomorphisme et E est de dimension k.

Afin de déterminer une base de E, on considère l'application linéaire

$$\Phi : (u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Vu que $\Phi(E) \subset E$, on peut définir un endomorphisme $\Psi = \Phi|_E \in \mathcal{L}(E)$ et l'application

$$g = f^{-1} \circ \Psi \circ f : (u_0, \ldots, u_{k-1}) \in \mathbb{C}^k \mapsto (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{C}^k.$$

On a $u_k = \alpha_{k-1}u_{k-1} + \ldots + \alpha_0 u_0$ et la matrice représentative de g dans la base canonique de $\mathbb{C}^k$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . & . & \alpha_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de Ψ est égal à celui de la matrice A et on vérifie que

$$P(X) = (-1)^k\Big(X^k - \alpha_{k-1}X^{k-1} - \ldots - \alpha_0\Big).$$

On pose

$$P(X) = (-1)^k \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i},\ C_i = \text{Ker}\ (\Psi - \lambda_i I_E)^{m_i}.$$

On a donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i$ et dim $C_i = m_i$. On vérifie que $C_i = \text{Ker}\ (\Phi - \lambda_i I_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^{m_i}$ et on en déduit que $u = (u_n)_{n\geq 0}$ appartient à C_i si, et seulement si, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+m_i} - \binom{m_i}{1}\lambda_i u_{n+m_i-1} + \binom{m_i}{2}\lambda_i^2 u_{n+m_i-2} - \cdots$$
$$+(-1)^{m_i}\binom{m_i}{m_i}\lambda_i^{m_i}u_n = 0.$$

On montre que ces équations admettent pour solutions les m_i suites linéairement indépendantes

$$u_n = \lambda_i^n n^q,\ n \in \mathbb{N} \text{ où } 0 \leq q \leq m_i - 1.$$

On obtient ainsi une base de C_i, d'où une base de E.

2.5 Décomposition de Dunford

Théorème 2.5.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, alors T s'écrit d'une façon unique sous la forme*

$$T = D + N\ (\textit{décomposition de Dunford})$$

où D est un endomorphisme diagonalisable, N un endomorphisme nilpotent et les endomorphismes D et N commutent. De pus, on peut choisir une base B_i de chaque sous-espace caractéristique telle que, dans cette base, la matrice représentative A_i de T_i soit de la forme $A_i = D_i + N_i$ où $D_i =$ diag $(\lambda_i, \ldots, \lambda_i)$ et N_i est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle.

Remarque 2.5.1 L'endomorphisme $T = D + N$ est diagonalisable si, et seulement si, $N = 0$.

L'existence d'une telle décomposition résulte de la remarque 2.4.1. Notons $T = D + N$ cette décomposition qui vérifie la propriété suivante

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{p} x_i,\ x_i \in C_i,\ \text{alors } Dx = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i.$$

Pour établir l'unicité, on utilisera la proposition 2.2.3, le corollaire 2.3.9 et les lemmes suivants.

Lemme 2.5.2 *Soit $T = D' + N'$ une autre décomposition de Dunford, alors D et D' commutent, ainsi que N et N'.*

Lemme 2.5.3 *Si $N, N' \in \mathcal{L}(E)$ sont deux endomorphismes nilpotents qui commutent, $N + N'$ est un endomorphisme nilpotent.*

2.6 Réduction des endomorphismes nilpotents

Théorème 2.6.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent dont le polynôme caractéristique est scindé, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de T est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \text{(\textit{matrice nilpotente de Jordan.})}$$

La preuve de ce théorème s'effectue comme suit. Soient $P(X) = (-1)^n X^n$ le polynôme caractéristique de T (corollaire 2.3.2) et $1 \leq p \leq n$ son indice de nilpotence. On considère les s.e.v.

$$N_i = \text{Ker } T^i \text{ pour } 0 \leq i \leq p\,;$$

on a

$$\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_p = E$$

et on construit une suite $(M_i)_{1 \leq i \leq p}$ de s.e.v. non réduits à 0 telle que

$$N_i = N_{i-1} \oplus M_i \text{ pour } 1 \leq i \leq p \text{ et } T(M_i) \subset M_{i-1} \text{ pour } 2 \leq i \leq p.$$

On a alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} M_i$$

et on vérifie que l'application $T|_{M_i} : M_i \to M_{i-1}$ est injective ; si $m_i = \dim M_i$, on en déduit que

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_p > 0.$$

On construit ensuite une base de E

$$e^i_j,\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq m_i$$

de la façon suivante : $(e^p_j)_{1 \leq j \leq m_p}$ est une base de M_p et, pour $1 \leq q \leq p-1$, $(e^q_j)_{1 \leq j \leq m_q}$ est une base de M_q complètant la famille libre $(Te^{q+1}_j)_{1 \leq j \leq m_{q+1}}$. Pour $1 \leq j \leq m_1$, on note E_j le s.e.v. engendré par les vecteurs

$$e^i_j,\ 1 \leq i \leq p,\ m_i \geq j. \tag{2.6.1}$$

On vérifie que $E = \bigoplus_{j=1}^{m_1} E_j$, que $T(E_j) \subset E_j$ et que la matrice représentative de $T|_{E_j}$ dans la base (2.6.1) est une matrice nilpotente de Jordan, ce qui prouve le théorème.

On en déduit le

Théorème 2.6.2 *(Jordan) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice* *représentative de T est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & \lambda & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & \lambda & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \lambda & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & \lambda & 1 \\ . & . & . & . & . & . & \lambda \end{pmatrix} (\textit{bloc de Jordan}) \textit{ où } \lambda \in \sigma(T).$$

Chapitre 3

Espaces euclidiens

3.1 Forme bilinéaire

Soit E un e.v., rappelons qu'une forme bilinéaire sur E est une application $B : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que

$$\text{pour tout } y \in E,\ \text{l'application } x \mapsto B(x, y) \text{ est linéaire}$$

et

$$\text{pour tout } x \in E,\ \text{l'application } y \mapsto B(x, y) \text{ est linéaire .}$$

Notons $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E ; il s'agit d'un s.e.v. de l'e.v. $\mathcal{F}(E \times E; \mathbb{K})$.

Lorsque E est de dimension finie n, étant donné une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on peut écrire

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \text{ où } b_{ij} = B(e_i, e_j).$$

On définit ainsi une matrice $b = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, appelée matrice de la forme bilinéaire B dans la base $\mathcal{B}$. L'application $B \mapsto b$ est évidemment un isomorphisme de $\mathcal{B}(E)$ sur $M_{n,n}(\mathbb{K})$; l'e.v. $\mathcal{B}(E)$ est donc de dimension n^2. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, b' la matrice représentative de la forme B dans cette base, on vérifie que

$$b' = {}^t P\, b\, P$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Le rang $r(B)$ d'une forme bilinéaire est par définition le rang de sa matrice représentative dans une base, ce rang ne dépendant pas du choix de la base. La forme est dit non dégénérée si ce rang est maximum, soit $r(B) = n$, c'est-à-dire si la matrice b est inversible ; sinon, on dit que la forme est dégénérée. Le déterminant de b est appelé le discriminant de la forme B dans la base $\mathcal{B}$.

Une forme bilinéaire B est dite symétrique si

$$B(x, y) = B(y, x) \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Ceci signifie que sa matrice représentative dans une base est symétrique, soit ${}^t b = b$. L'espace $\mathcal{S}(E)$ des formes bilinéaires symétriques est donc un e.v. de dimension $n(n + 1)/2$.

3.2 Espace euclidien

Définition 3.2.1 *Soit E un e.v. réel de dimension finie n, une structure euclidienne sur E est définie par la donnée d'une forme bilinéaire symétrique*

$$(\bullet|\bullet) : (x, y) \in E \times E \mapsto (x|y) \in \mathbb{R}$$

définie positive, c'est-à-dire telle que

$$(x|x) > 0 \textit{ pour tout } x \in E, x \neq 0.$$

Le réel $(x|y)$ est appelé le produit scalaire de x et y. La norme d'un vecteur x est définie par

$$\|x\| = (x|x)^{1/2}.$$

On notera que

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et tout } x \in E$$

et que $\|x\| = 0$ équivaut à $x = 0$.

Exemple 3.2.1 Si $B = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, on définit une structure euclidienne sur E en posant

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

On a alors

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}.$$

Proposition 3.2.1 *Pour tout $x, y \in E$, on a*

$$|(x|y)| \leq \|x\| \, \|y\| \ (\textit{inégalité de Cauchy-Schwarz}),$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ (\textit{inégalité triangulaire}),$$
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ (\textit{identité du parallèlogramme}).$$

Dans un espace euclidien, on dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, soit $(x|y) = 0$.

Théorème 3.2.2 *(Pythagore) Soient $x_1, \cdots, x_p \in E$ des vecteurs orthogonaus deux à deux, alors*

$$\| \sum_{i=1}^{p} x_i \|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2.$$

Remarque 3.2.1 Si F est un s.e.v. d'un espace euclidien E, la restriction à $F \times F$ du produit scalaire de E définit une structure euclidienne sur F : on dit que F est un sous-espace euclidien de E.

3.3 Base orthonormale

Dans un espace euclidien E, on dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une famille orthonormale si

$$(x_i | x_j) = \delta_{ij} \text{ pour tout } i, j \in I.$$

Ce sont donc des vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux. On vérifie qu'une telle famille est libre, donc Card $I \leq n$.

Une famille orthonormale qui est une base est appelée une base orthonormale. Si $B = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale, on a pour $x, y \in E$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ où } x_i = (x|e_i)$$

et

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ où } x_i = (x|e_i), \ y_i = (y|e_i).$$

Théorème 3.3.1 *Tout espace euclidien admet une base orthonormale.*

Si A est une partie de E, on définit l'orthogonal de A par

$$A^{\perp} = \{x \in E\,;\ (x|y) = 0 \text{ pour tout } y \in A\}.$$

Proposition 3.3.2 *Pour tout $A \subset E$, $A^{\perp}$ est un s.e.v. de E et $A^{\perp} =$ s.e.v. $(A)^{\perp}$.*

Théorème 3.3.3 *1. Soient F un s.e.v. d'un espace euclidien E et $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$. On dit que y est la projection orthogonale de x sur F, on le note $y = P_F x$. L'application $P_F : E \to F$ est linéaire.*

2. La projection orthogonale de x sur F est l'unique point $y \in F$ tel que

$$\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\| = d(x, F) \text{ (distance de } x \text{ à } F).$$

3. On a $E = F \oplus F^{\perp}$.

Corollaire 3.3.4 *(théorème de la base incomplète) Toute famile orthonormale est contenue dans une base orthonormale.*

Proposition 3.3.5 *(orthonormalisation de Schmidt) Soit $(a_1, \cdots, a_n)$ une base de E, alors il existe une unique base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que, pour tout $1 \leq p \leq n$,*

1. s.e.v. $(e_1, \cdots, e_p) =$ *s.e.v.* $(a_1, \cdots, a_p)$,
2. $(e_p|a_p) > 0$.

3.4 Le groupe orthogonal

Soient E un e.v. de dimension n et B, B' deux bases orthonormales, alors la matrice de passage P de B à B' vérifie

$$ {}^tP\,P = I_n. \tag{3.4.1} $$

Une telle matrice est appelée une matrice orthogonale et l'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(n;\mathbb{R})$. Étant donné une base B, une matrice orthogonale peut toujours être considérée comme la matrice de passage de la base B à une base B' et, si l'une des bases est une base orthonormale, il en est de même de l'autre.

On remarquera que dét $P = \pm 1$ si $P \in O(n)$, on peut donc définir le sous-groupe, groupe spécial orthogonal,

$$SO(n) = \{P \in O(n)\,;\ \text{dét}\, P = 1\}.$$

Proposition 3.4.1 *Soient E un espace euclidien et $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. pour tout $x \in E$, $\|Tx\| = \|x\|$,

2. pour tout $x, y \in E$, $(Tx|Ty) = (x|y)$,

3. la matrice représentative de T dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

Un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant ces propriétés est appelé une isométrie ou une transformation orthogonale ; un tel endomorphisme est un automorphisme de E. On notera $O(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales ; il s'agit d'un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$ isomorphe (en tant que groupe) au groupe $O(n)$.

Étudions ce groupe $O(E)$ lorsque $n = 1, 2$ ou 3. Soient $T \in O(E)$ et $A \in O(n)$ sa matrice représentative dans une base orthonormale.

Lorsque $n = 1$, on a $A = (\pm 1)$; si $A = (1)$, $T = I_E$ et si $A = (-1)$, T est la symétrie par rapport à l'origine.

Lorsque $n = 2$, prenons $E = \mathbb{R}^2$ muni de la stucture euclidienne associée à sa base canonique (exemple 3.2.1). La transformation orthogonale T s'écrit dans cette base

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \textit{ ou } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, 0 \le \theta < 2\pi.$$

En posant $Z = X + iY$ et $z = x + iy$, on a $Z = e^{i\theta}z$ dans le premier cas (rotation d'angle θ) et $Z = e^{i\theta}\overline{z}$ dans le second cas (symétrie par rapport à l'axe des x suivie d'une rotation d'angle θ, c'est-à-dire symétrie par rapport à la droite d'angle $\theta/2$).

Lorsque $n = 3$, prenons $E = \mathbb{R}^3$ muni de la stucture euclidienne associée à sa base canonique (exemple 3.2.1). On peut supposer dét $T = 1$: si dét $T = -1$, dét $(-T) = 1$ et il suffit de composer avec la symétrie par rapport à l'origine. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres réelles ou complexes de A. On a alors 3 cas posssibles

$$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1) \text{ ou } (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1) \text{ ou}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \mu, \lambda_3 = \overline{\mu},\ \mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}).$$

Notons E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3\,;\, Tx = x\} \text{ (ensemble des points invariants par T)}.$$

Lemme 3.4.2 *Si $T \neq I_{\mathbb{R}^3}$, dim $E_1 = 1$.*

Supposons $T \neq I_{\mathbb{R}^3}$, alors $E_1^{\perp}$ est un s.e.v. de dimension 2 stable par T et $T|_{E_1^{\perp}}$ est une isométrie de ce sous-espace. Choisissons une base orthonormale (e_1, e_2) de $E_1^{\perp}$et un vecteur unitaire $e_3 \in E_1$. On obtient ainsi une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base la matrice représentative de T s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

La transformation T est une rotation d'angle θ autour de l'axe e_3.

3.5 Adjoint d'un endomorphisme

Soient E un espace euclidien et $E^{\star}$ son dual, on définit une application $j : E \to E^*$ par

$$j(y) : x \in E \mapsto (x|y) \in \mathbb{R} \text{ où } y \in E.$$

Théorème 3.5.1 *L'application $j : E \to E^{\star}$ est un isomorphisme. Autrement dit, pour toute forme linéaire $T \in E^{\star}$, il existe un unique $y \in E$ tel que*

$$Tx = (x|y) \textit{ pour tout } x \in E.$$

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, pour tout $y \in E$, il existe un unique point $y^{\star} = T^{\star}y \in E$ tel que

$$(Tx|y) = (x|T^{\star}y) \text{ pour tout } x \in E.$$

Proposition 3.5.2 *L'application $T^{\star} : F \to E$ est linéaire.*

L'endomorphisme $T^{\star}$ est appelé l'adjoint de l'endomorphisme T. On vérifie que

$$\text{l'application } T \in \mathcal{L}(E) \mapsto T^{\star} \in \mathcal{L}(E) \text{ est un isomorphisme,}$$

et, pour tout $S, T \in \mathcal{L}(E)$,

$$T^{\star\star} = T \text{ et } (T \circ S)^{\star} = S^{\star} \circ T^{\star}.$$

Proposition 3.5.3 *Dans une base orthonormale, la matrice représentative de $T^{\star}$ est la transposée de celle de T.*

Définition 3.5.1 *Un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique si $T = T^{\star}$.*

Proposition 3.5.4 *Un endomorphisme est symétrique si, et seulement si, sa matrice représentative A dans une base orthonormale est symétrique :$A = {}^tA$.*

Proposition 3.5.5 *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique est scindé et des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Théorème 3.5.6 *Tout endomorphisme symétrique $T \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable. Plus précisément, il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice représentative de T est diagonale.*

3.6 Forme quadratique

Soient E un e.v. réel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et B une forme bilinéaire de matrice $b = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On pose

$$Q(x) = B(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x_i x_j \text{ si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

On dit que Q est une forme quadratique ; une forme quadratique est simplement un polynôme homogène de degré 2.

Proposition 3.6.1 *Soit B une forme bilinéaire symétrique, alors*
$$B(x,y) = \frac{1}{2}\Big(B(x+y,x+y) - B(x,x) - B(y,y)\Big)(\textit{formule de polarisation}).$$

Ceci montre que, si Q est une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire symétrique B telle que $Q(x) = B(x,x)$. On l'appelle la forme polaire de Q ; elle est donnée également par la formule

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x) y_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i(y) x_i \text{ où } Q_i(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i}(x).$$

Théorème 3.6.2 *(loi d'inertie de Sylvester) Soit Q une forme quadratique, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que dans cette base*
$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - \left(x_{p+1}^2 + \cdots + x_r^2\right)$$
où r est le rang de la forme polaire de Q et $0 \leq p \leq r$. L'entier p ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ et le couple (p,q) où $q = r - p$ est appelé la signature de la forme quadratique.

On dit qu'on a réduit Q à une somme de carrés. Une autre façon d'exprimer ce résultat consiste à prendre une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Alors, il existe des formes linéaires, linéairement indépendantes,

$$l_i(x) = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} x_j,\ 1 \leq i \leq n,$$

et des réels λ_i tels que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, l_i(x)^2.$$

L'entier p (resp. q) est le nombre de $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$). La méthode de Gauss permet d'effectuer pratiquement cette réduction.

Chapitre 4

Espaces hermitiens

4.1 Forme hermitienne

On considère ici un espce vectoriel complexe de dimension finie n.

Définition 4.1.1 *Soit E un espace vectoriel complexe, une application $B : E \times E \to \mathbb{C}$ est appelée une forme sesquilinéaire si, pour tout x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 de E et tout λ_1, λ_2 de $\mathbb{C}$*

$$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y),$$
$$B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda}_1 B(x, y_1) + \overline{\lambda}_2 B(x, y_2).$$

On dit que B est une forme hermitienne si on a de plus, pour tout x, y de E,

$$B(x, y) = \overline{B(y, x)}.$$

Si B est une forme sesquilinéaire, l'application $B(\bullet, y)$ est, pour tout y, une forme linéaire sur E ; pour tout x, l'application $B(x, \bullet)$ est dite semi-linéaire.

Si B est une forme hermitienne, $B(x, x)$ est réel pour tout x ; autrement dit, une forme hermitienne est réelle sur la diagonale de E. Cette propriété caractérise les formes. hermitiennes.

Proposition 4.1.1 *Soit E un espace vectoriel complexe, alors toute forme sesquilinéaire réelle sur la diagonale de E est hermitienne.*

Une forme hermitienne $B : E \times E \to \mathbb{C}$ est dite positive si $B(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et elle est dite définie positive ou positive non dégénérée si $B(x,x) > 0$ pour tout $x \in E - \{0\}$.

Soient B une forme sesquilinéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on a

$$B(x,y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i \overline{y}_j \text{ où } b_{ij} = B(e_i, e_j).$$

On définit ainsi une matrice $b = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, appelée matrice de la forme sesquilinéaire B dans la base $\mathcal{B}$. La forme B est hermitienne si, et seulement si, $b_{ji} = \overline{b}_{ij}$, soit ${}^t b = \overline{b}$; on dit que la matrice b est hermitienne.

La forme hermitienne B est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, $\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i \overline{x}_j \geq 0$ (resp. $\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i \overline{x}_j > 0$) pour tout $x \neq 0$.

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, b' la matrice représentative de la forme B dans cette base, on vérifie que

$$b' = {}^t P \, b \, \overline{P}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

4.2 Espaces hermitiens

Définition 4.2.1 *Soit E un e.v. complexe de dimension finie n, une structure hermitienne sur E est définie par la donnée d'une forme hermitienne*

$$(\bullet|\bullet) : (x,y) \in E \times E \mapsto (x|y) \in \mathbb{C}$$

définie positive.

Le complexe $(x|y)$ est appelé le produit scalaire de x et y. La norme d'un vecteur x est définie par

$$\|x\| = (x|x)^{1/2}.$$

On notera que

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et tout } x \in E$$

et que $\|x\| = 0$ équivaut à $x = 0$.

Exemple 4.2.1 Si $B = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, on définit une structure hermitienne sur E en posant

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i \text{ si } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \; y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

On a alors

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\Big)^{1/2}.$$

La proposition 3.2.1, le théorème 3.2.2 et la remarque 3.2.1 valent encore dans le cas hermitien. Le paragraphe 3.3 concernant les bases orthonormales subsiste également.

Soient B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B', alors, si B est une base orthonormale, il en est de même de B' si, et seulement si,

$$P^* P = I_n \tag{4.2.1}$$

où $P^* = {}^t\overline{P}$ est appelée la matrice adjointe de P. Une matrice vérifiant (4.2.1) est dite unitaire. L'ensemble $U(n)$ des matrices unitaires est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(n : \mathbb{C})$, appelé groupe unitaire. Si P est une matrice unitaire, on notera que $|\text{dét } P| = 1$.

4.3 Adjoint d'un endomorphisme

Soient E un espace hermitien, E^* le dual de E, on définit une application $j : E \to E^*$ en posant pour $y \in E$

$$j(y) : x \in E \mapsto (x|y) \in \mathbb{C}.$$

Théorème 4.3.1 *L'application $j : E \to E^\star$ est une bijection semi-linéaire. Autrement dit, pour toute forme linéaire $T \in E^\star$, il existe un unique $y \in E$ tel que*

$$Tx = (x|y) \text{ pour tout } x \in E.$$

On dit que j est un semi-isomorphisme.

Soient E et F deux espaces hermitiens et $T \in \mathcal{L}(E; F)$, pour tout $y \in F$, il existe un unique point $y^\star = T^\star y \in E$ tel que

$$(Tx|y)_F = (x|T^\star y)_E \text{ pour tout } x \in E.$$

Proposition 4.3.2 *L'application $T^\star : F \to E$ est linéaire.*

L'application $T^\star$ est appelée l'adjointe de T. On vérifie que l'application $T \in \mathcal{L}(E) \mapsto T^\star \in \mathcal{L}(E)$ est un semi-isomorphisme et, si E, F et G sont des espaces hermitiens, $S \in \mathcal{L}(E; F)$, $T \in \mathcal{L}(F; G)$,

$$(T \circ S)^\star = S^\star \circ T^\star.$$

Proposition 4.3.3 *Dans une base orthonormale, la matrice représentative de $T^\star$ est l'adjointe de celle de T.*

Définition 4.3.1 *Un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit hermitien si $T = T^\star$.*

Proposition 4.3.4 *Un endomorphisme est hermitien si, et seulement si, sa matrice représentative A dans une base orthonormale est hermitienne : $A = A^\star$.*

Proposition 4.3.5 *Les valeurs propres d'un endomorphisme hermitiens sont réelles et des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

4.4 Opérateurs normaux

On dit qu'un opératreur $T \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $T \circ T^\star = T^\star \circ T$. Si A est la matrice représentative de T dans une base orthonormale, ceci signifie que la matrice A est normale, c'est-à-dire que $A\,A^\star = A^\star\,A$. Tout opérateur hermitien, ainsi que tout opérateur unitaire, est normal.

Lemme 4.4.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal, alors Ker $T =$ Ker $T^\star$.*

Lemme 4.4.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal, alors*

$$\lambda \in \sigma(T) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^\star) \text{ et } E_\lambda(T) = E_{\overline{\lambda}}(T^\star).$$

Lemme 4.4.3 *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal, $\lambda, \mu \in \sigma(T)$, $\lambda \neq \mu$, alors les sous-espaces propres $E_\lambda(T)$ et $E_\mu(T)$ sont orthogonaux.*

Lemme 4.4.4 *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un s.e.v. stable par T et $T^\star$, alors $F^\perp$ est stable par T et $T^\star$.*

Théorème 4.4.5 *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal, alors T est diagonalisable et il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice représentative de T est diagonale, autrement dit il existe une base orthonormale de vecteurs propres. En termes de matrices, si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est une matrice normale, il existe une matrice unitaire $P \in U(n)$ telle que $P^\star AP$ soit diagonale.*

On a alors

$$E = \oplus_{\lambda \in \sigma(T)} E_\lambda(T),$$

les sous-espaces propres $E_\lambda(T)$ étant orthogonaux deux à deux.

On en déduit qu'une matrice normale est hermitienne si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont réelles et qu'elle est unitaire si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont de module 1.