ANNALES ALGÈBRE LINÉAIRE – 2006-07 / 2007-08.

PARTIEL 2006-07.

SUJET

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Examen du mardi 21 Novembre 2006 (durée 2 heures).
Document autorisé : résumé de cours.

Exercice 1 (12 points) Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de T.
2. Déterminer le polynôme minimal m de T.
3. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?
4. Déterminer les sous-espaces propres de T et retrouver ainsi le résultat de 3.
5. Soit n un entier ≥ 2, en utilisant la division du polynôme X^n par le polynôme minimal $m(X)$, montrer qu'il existe des réels a_n et b_n tels que

$$T^n = a_n T + b_n I_{\mathbb{R}^3},$$

puis calculer a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 2 (8 points)

Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie et A, B et M des endomorphismes de E tels que $A \circ M = M \circ B$.

1. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$A^k \circ M = M \circ B^k,$$

et en déduire que

$$Q(A) \circ M = M \circ Q(B) \text{ pour tout polynôme } Q \in \mathbb{C}[X].$$

2. On note $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ les spectres des endomorphimes A et B et on suppose que

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset.$$

On note P le polynôme caractéristique de A, soit

$$P(X) = \pm \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

a. Montrer que les endomorphismes $B - \lambda_i I_E$ sont des isomorphismes et en déduire que $P(B)$ est un isomorphisme.

b. Déduire de ce qui précède que $M = 0$ (utiliser le théorème de Cayley-Hamilton).

PARTIEL 2006-07
CORRIGÉ page 1/2

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Corrigé de l'examen du 21 Novembre 2006

Exercice 1

1. On vérifie que $P(X) = -(X-2)^2(X-4)$. Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ (valeur propre double) et $\lambda_3 = 4$ (valeur propre simple).

2. Le polynôme minimal $m(X)$ ne peut être que $P(X)$ ou $(X-2)(X-4)$. On constate que $(A-2I_3)(A-4I_3) = 0$ et par conséquent $m(X) = (X-2)(X-4)$.

3. Le polynôme minimal étant scindé et à racines simples, l'endomorphisme T est diagonalisable.

4. Le système linéaire $(A-2I_3)x = 0$, $x = (x_1 x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, s'écrit simplement $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ est donc le sous-espace vectoriel de dimension 2

$$E_1 = E_2 = \{(x_1 x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}.$$

La résolution du système linéaire $(A-4I_3)x = 0$ montre que le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 4$ est la droite

$$E_3 = \mathbb{R}(1,1,0).$$

Vu que dim E_1 + dim $E_3 = 3$, l'endomorphisme T est diagonalisable.

5. Par division, on peut écrire

$$X^n = (X-2)(X-4)Q_n(X) + a_n X + b_n$$

où Q_n est un polynôme. Le polynôme minimal étant un polynôme annulateur, on en déduit que

$$T^n = a_n T + b_n I_{\mathbb{R}^3}.$$

Pour calculer a_n et b_n, il suffit de faire successivement $X = 2$, puis $X = 4$ dans la formule ci-dessus. On obtient ainsi les relations

$$2^n = 2\,a_n + b_n \text{ et } 4^n = 4\,a_n + b_n.$$

La résolution de ce système linéaire conduit à

$$a_n = 2^{n-1}(2^n - 1),\; b_n = 2^{n+1} - 4^n.$$

PARTIEL 2006-07
CORRIGÉ page 212

Exercice 2

1. Pour $k = 0$, la formule se réduit à $M = M$ et, pour $k = 1$, à l'hypothèse. On raisonne ensuite par récurrence en supposant la formule établie pour k. On a alors

$$A^{k+1} \circ M = A \circ (A^k \circ M) = A \circ (M \circ B^k) = (A \circ M) \circ B^k = (M \circ B) \circ B^k = M \circ B^{k+1},$$

ce qui établit la formule pour $k+1$.

Soit $Q(X) = \sum_{j=0}^{q} a_j X^j$ un polynôme. On a alors, en utilisant la formule précédente,

$$Q(A) \circ M = (\sum_{j=0}^{q} a_j A^j) \circ M = \sum_{j=0}^{q} a_j (A^j \circ M) = \sum_{j=0}^{q} a_j (M \circ B^j) = M \circ (\sum_{j=0}^{q} a_j B^j) = M \circ Q(B).$$

2,a. On remarque que λ_i étant une valeur propre de A n'est pas une valeur propre de B vu l'hypothèse. On en déduit que $B - \lambda_i I_E$ est un isomorphisme. Une composée d'isomorphismes étant encore un isomorphisme, ceci montre que $P(B)$ est un isomorphisme.

b. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P(A) = 0$ et, d'après 1., ceci montre que $M \circ P(B) = 0$, d'où $M = 0$ vu que $P(B)$ est un isomorphisme.

CONTRÔLE TERMINAL 2006-07
SUJET
page 1/2.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Examen du Mercredi 17 Janvier 2007 (durée 2 heures).
Document autorisé : résumé de cours.

Exercice 1 (7 points)

On considère l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant pour matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique P de T.
2. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?
3. On pose

$$E_1 = \text{Ker } (T - I),\ E_2 = \text{Ker } (T - 2I)^2.$$

a. Justifier le fait que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

b. On pose

$$P_1(X) = X - 1 \text{ et } P_2(X) = (X - 2)^2.$$

Déterminer des polynômes $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$Q_1(X)P_1(X) + Q_2(X)P_2(X) = 1.$$

c. En déduire les projecteurs linéaires $p_i : E \to E_i$, $i = 1, 2$, en fonction de T, puis leur matrice représentative A_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice (5 points) On considère l'espace vectoriel E des polynômes de degré ≤ 2 et on pose

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt \text{ pour } P, Q \in E.$$

1. Montrer que $(\bullet|\bullet)$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit F le s.e.v. de E constitué des polynômes de degré ≤ 1 et soit $P \in E$ le polynôme $P(t) = t^2$. Déterminer la projection orthogonale P_0 de P sur F.
3. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(a, b) = \int_0^1 (t^2 - (at + b))^2\, dt.$$

CONTRÔLE
TERMINAL 2006-07
SUJET page 2/2.

Montrer que la fonction F est bornée inférieurement et atteint sa borne inférieure en un unique point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, puis calculer ce minimum.

Execice 3 (5 points)
Soit E un espace euclidien, un endomorphisme symétrique $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit positif si

$$(Tx|x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in E.$$

1. Montrer qu'un endomorphisme symétrique $T \in \mathcal{L}(E)$ est positif si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont ≥ 0.
2. Si $T \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique positif, montrer que T^2 est un endomorphisme symétrique positif.
3. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique positif, montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique positif $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $S^2 = T$.

Exercice 4 (3 points)
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
1. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire $(\bullet|\bullet)$ sur E pour lequel B est une base orthonormale.
2. Si $T \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme, que représente alors la quantité

$$\sum_{p=1}^{n} (Te_p|e_p)\,?$$

CONTRÔLE TERMINAL
2006-07
CORRIGÉ page 1/3

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Corrigé de l'examen du 17 Janvier 2007

Exercice 1

1. On vérifie que $P(X) = -(X-1)(X-2)^2$.

2. L'endomorphisme T est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2. Or, ce sous-espace est simplement l'espace de dimension 1 engendré par le vecteur $(1,1,2)$. L'endomorphisme n'est donc pas diagonalisable.

3,a. Les sous-espaces E_i sont les sous-espaces caractéristiques et on sait que $\mathbb{R}^3$ est la somme directe de ces sous-espaces.

b. Une décomposition en éléments simples montre que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2},$$

d'où

$$Q_1(X)P_1(X) + Q_2(X)P_2(X) = 1 \text{ avec } Q_1(X) = -X+3,\ Q_2(X) = 1.$$

c. On en déduit que

$$p_1 = Q_2(T) \circ P_2(T) \text{ et } p_2 = Q_1(T) \circ P_1(T).$$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}^3$, posons

$$x_1 = p_1(x) \text{ et } x_2 = p_2(x).$$

Alors, $x = x_1 + x_2$ et $x_1 \in E_1$ car $P_1(T)x_1 = Q_2(T) \circ P_1(T) \circ P_2(T)x = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et on vérifie de même que $x_2 \in E_2$.

Ceci montre que

$$p_1 = (T-2I)^2 \text{ et } p_2 = (-T+3I)(T-I),$$

d'où

$$A_1 = (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

et, vu que $p_1 + p_2 = I$,

$$A_2 = I_3 - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

CONTRÔLE TERMINAL
2006-07
CORRIGÉ page 2/3

Exercice 2

1. Il est clair que $(\bullet|\bullet)$ est une forme bilinéaire symétrique. De plus, $(P|P)$ est > 0 si $P \neq 0$, car

$$\int_0^1 P^2(t)\,dt = 0 \Longrightarrow P \equiv 0.$$

2. Posons $P_0(t) = \alpha t + \beta$ et écrivons que $P - P_0$ est orthogonal à F, c'est-à-dire aux polynômes 1 et t, soit

$$\int_0^1 \Big(t^2 - (\alpha t + \beta)\Big)\,dt = 0 \text{ et } \int_0^1 \Big(t^2 - (\alpha t + \beta)\Big)t\,dt = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{3} - \Big(\frac{\alpha}{2} + \beta\Big) = 0,\ \frac{1}{4} - \Big(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2}\Big) = 0,$$

système linéaire dont la solution est $\alpha = 1, \beta = -1/6$ et, par conséquent, $P_0(t) = t - 1/6$.

3. On a $F(a,b) = \|P - Q\|^2$ où $Q(t) = at + b$. D'après le théorème de projection, la fonction F admet un minimum m atteint pour $Q = P_0$. On a

$$m = \|P - P_0\|^2 = (P - P_0|P - P_0) = (P - P_0|P) = \int_0^1 \Big(t^2 - (\alpha t + \beta)\Big)t^2\,dt$$

et on vérifie que $m = 1/180$.

Exercice 3

1. L'endomorphisme T étant symétrique, il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $Te_i = \lambda_i e_i$ pour $1 \leq i \leq n$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ désigne les valeurs propres de T. On a $(Te_i|e_i) = \lambda_i$, ce qui montre que les valeurs propres sont ≥ 0 si T est positif. Réciproquement, supposons $\lambda_i \geq 0$, alors

$$(Tx|x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \text{ si } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

et il en résulte que $(Tx|x) \geq 0$.

2. Si T est symétrique, il en est de même de T^2 car $(T^2)^* = (T^*)^2 = T^2$. Avec les notations précédentes, on a $T^2 e_i = \lambda_i^2 e_i$ et ceci montre que les valeurs propres de T^2 sont $(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$; elles sont donc ≥ 0, ce qui prouve que T^2 est positif. On remarquera en outre que, pour toute valeur propre λ de T,

$$\text{Ker}\,(\lambda I - T) = \text{Ker}\,(\lambda^2 I - T^2)$$

3. D'après 2., les valeurs propres d'un tel endomorphisme S, s'il existe, sont nécessairement $(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2})$ et, d'après la remarque précédente, on a nécessairement $Se_i = \lambda^{1/2} e_i$, c'est-à-dire

$$Sx = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{1/2} x_i \text{ si } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

On définit bien ainsi un endomorphisme symétrique positif tel que $S^2 = T$.

Exercice 4

CONTRÔLE TERMINAL
2006.07
CORRIGÉ page 3/3

1. Soit $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ deux points de E. Pour tout produit scalaire sur E, on a

$$(x|y) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j y_k \, (e_j|e_k)$$

et, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale, on a nécessairement

$$(x|y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Ceci montre que, s'il existe un produit scalaire répondant à la question, il est nécessairement donné par la formule précédente. Cette formule définissant bien un produit scalaire, ceci permet de conclure.

2. Soit $A = (a_{pq})$ la matrice représentative de T, alors

$$Te_q = \sum_{p=1}^{n} a_{pq} e_p,$$

d'où

$$(Te_q|e_q) = a_{qq} \text{ et } \sum_{q=1}^{n} (Te_q|e_q) = \sum_{q=1}^{n} a_{qq}$$

et ceci montre que la quantité $\sum_{q=1}^{n} (Te_q|e_q)$ est simplement la trace de l'endomorphisme T.

CONTRÔLE TERMINAL
2006-07 SESSION 2
SUJET page 1/2.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Examen du Mardi 11 Septembre 2007 (durée 2 heures).
Document autorisé : résumé de cours.

Exercice 1 (9 points)
On considère l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant pour matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de T .
2. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces propres de T et retrouver ainsi le résultat de 2.
4. Exhiber une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de T est sous forme de Jordan : on précisera la matrice de passage P, son inverse P^{-1} et on effectuera la calcul de $P^{-1}AP$.

Exercice 2 (5 points) Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme n'admettant aucune valeur propre (réelle).
1. Montrer que, pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, les vecteurs x et Tx sont linéairement indépendants.
2. Le polynôme caractéristique de T peut s'écrire

$$P(X) = \prod_{j=1}^{k}(X^2 + a_jX + b_j),\ \ a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

On définit les endomorphismes

$$T_j = T^2 + a_jT + b_jI_d,\ \ 1 \leq j \leq k.$$

a. Montrer que l'un au moins des T_j n'est pas injectif.

Il existe donc $1 \leq j \leq k$ et $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, tel que $T_jx_0 = 0$.

b. En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel de dimension 2 stable par T.

CONTRÔLE TERMINAL
2006-07- SESSION 2
SUJET page 2/2.

Exercice 3 (8 points)

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. On considère l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant pour matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est une matrice orthogonale.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,;\, Tx = x\}.$$

3. Choisir une base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que le vecteur e_3 engendre E.
4. Montrer que la matrice représentative de T dans la base B est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire la nature géométrique de la transformation T.

CONTRÔLE TERMINAL
2006-07 SESSION 2
CORRIGÉ page 1/3.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Corrigé de l'examen du 11 Septembre 2007

Exercice 1

1. On vérifie que

$$P(X) = \text{dét}\begin{pmatrix} 3-X & 0 & 1 \\ 2 & 1-X & 1 \\ -1 & 1 & 1-X \end{pmatrix} = -(X-3)(X-1)^2.$$

Le polynôme minimal $m(X)$ ne peut être que $(X-3)(X-1)^2$ et $(X-3)(X-1)$. On vérifie que $(A-3I)(A-I) \neq 0$, donc $m(X) = -P(X)$.

2. Le polynôme P est scindé, mais le polynôme minimal n'est pas à racines simples, donc l'endomorphisme T n'est pas diagonalisable.

3. Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 1$, la valeur propre λ_2 étant double. Notons $E_i = \text{Ker}\,(T - \lambda_i I)$ les sous-espaces propres. En résolvant les systèmes linéaires $Ax = \lambda_i x$, $x \in \mathbb{R}^3$ on obtient

$$E_1 = \mathbb{R}(1,1,0), E_2 = \mathbb{R}(1,1,-2).$$

L'endomorphisme n'est pas diagonalisable car E_2 est de dimension 1.

4. Construisons une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$Te_1 = 3\,e_1,\ Te_2 = e_2,\ Te_3 = e_2 + e_3.$$

Dans une telle base, la matrice représentative de T est simplement la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur e_1 doit être un vecteur propre pour la valeur propre λ_1 ; prenons par exemple $e_1 = (1,1,0)$. De même, le vecteur e_2 doit être un vecteur propre pour la valeur propre λ_2 ; prenons $e_2 = (1,1,-2)$. Quant au vecteur $e_3 = (x,y,z)$, l'équation $Te_3 = e_2 + e_3$ s'écrit

$$2x + z = 1,\ -x + y = -2$$

et admet la solution $e_3 = (1,-1,-1)$. La matrice de passage est alors

CONTRÔLE TERMINAL 2006-07 SESSION 2 CORRIGÉ page 2/3

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

on vérifie que

$$P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et que $P^{-1}AP = J$.

Exercice 2

1. Supposons que $\lambda x + \mu Tx = 0$ où $x \neq 0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\mu = 0$, on a $\lambda x = 0$, d'où $\lambda = 0$ et, si $\mu \neq 0$, alors $Tx = -(\lambda/\mu)x$ et $-(\lambda/\mu)$ est une valeur propre, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2,a. D'après le théorème de Cayley-Hamilton $P(T) = T_1 \circ \ldots \circ T_k = 0$. Si tous les endomorphismes T_j étaient injectifs, $P(T)$ le serait, ce qui est absurde.

b. On pose $F = s.e.v.(x_0, Tx_0)$. Alors, F est de dimension 2 d'après 1. Vérifions que F est stable par T. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$T(\lambda x_0 + \mu Tx_0) = \lambda Tx_0 + \mu T^2 x_0 \text{ où } T^2 x_0 = -a_j Tx_0 - b_j x_0 \in F,$$

d'où $T(F) \subset F$.

Exercice 3

1. On vérifie par exemple que les vecteurs colonnes sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

2. On vérifie que $E = \mathbb{R}(1,1,3)$.

3. On peut prendre par exemple $e_3 = 1/\sqrt{11}(1,1,3)$. On choisit un vecteur unitaire e_1 orthogonal à e_3, par exemple $e_1 = 1/\sqrt{2}(1,-1,0)$, puis $e_2 = e_3 \wedge e_1$, soit $e_2 = 1/\sqrt{22}(3,3,-2)$.

4. On vérifie alors que

$$Te_1 = -\frac{5}{6}e_1 + \frac{\sqrt{11}}{6}e_2,\ Te_2 = -\frac{\sqrt{11}}{6}e_1 - \frac{5}{6}e_2\ Te_3 = e_3.$$

Autement dit, dans la base (e_1, e_2, e_3), la matrice de T est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\cos\theta = -5/6$, $\sin\theta = \sqrt{11}/6$. L'endomorphisme T est donc une rotation dont l'axe est la droite E et d'angle θ.

CONTRÔLE TERMINAL
2006-07 SESSION 2
CORRIGÉ pas 3/3

1. Soit $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ deux points de E. Pour tout produit scalaire sur E, on a

$$(x|y) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j y_k \, (e_j|e_k)$$

et, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale, on a nécessairement

$$(x|y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Ceci montre que, s'il existe un produit scalaire répondant à la question, il est nécessairement donné par la formule précédente. Cette formule définissant bien un produit scalaire, ceci permet de conclure.

2. Soit $A = (a_{pq})$ la matrice représentative de T, alors

$$Te_q = \sum_{p=1}^{n} a_{pq} e_p,$$

d'où

$$(Te_q|e_q) = a_{qq} \text{ et } \sum_{q=1}^{n} (Te_q|e_q) = \sum_{q=1}^{n} a_{qq}$$

et ceci montre que la quantité $\sum_{q=1}^n (Te_q|e_q)$ est simplement la trace de l'endomorphisme T.

PARTIEL 2007-08
SUJET

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Examen du Lundi 29 Octobre 2007 (durée 2 heures).
Document autorisé : résumé de cours.

On considère l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant pour matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2\mu & -3\mu - 2 & \mu + 3 \end{pmatrix}.$$

où μ est un paramètre réel.

1. Déterminer selon les valeurs de μ
   a. le polynôme caractéristique de T,
   b. les valeurs propres de T,
   c. les sous-espaces propres.
2. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?
3. Quel est le polynôme minimal de T ?
4 . Exhiber une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de T est sous forme de Jordan : on précisera la matrice de passage P et, dans un au moins des cas qui se présentent, on calculera l'inverse P^{-1}.
5. Déterminer toutes les solutions de la récurrence linéaire

$$u_{n+3} = (\mu + 3)\, u_{n+2} - (3\mu + 2)\, u_{n+1} + 2\mu\, u_n \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

6. On considère l'équation différentielle

$$\frac{d^3x}{dt^3} = (\mu + 3)\frac{d^2x}{dt^2} - (3\mu + 2)\frac{dx}{dt} + 2\mu x$$

et on se propose de déterminer toutes les solutions $t \mapsto x(t)$ trois fois dérivables en procédant de la façon suivante.

a. On pose $X = (x, dx/dt, d^2x/dt^2)$. Montrer que X est alors solution d'un système différentiel $X' = BX$ où $B \in M_3(\mathbb{R})$ est une matrice qu'on précisera.

b. On pose $X = PY$ où $P \in GL(3;\mathbb{R})$. Écrire le système différentiel vérifié par Y et le résoudre grâce à un choix convenable de la matrice P.

c. En déduire la solution générale de l'équation différentielle.

PARTIEL 2007-08
CORRIGÉ page 1/3

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Corrigé de l'examen du 29 Octobre 2007

1,a. On vérifie que le polynôme caractéristique vaut

$$P(X) = -(X^3 - (\mu+3)X^2 + (3\mu+2)X - 2\mu).$$

b. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \mu$. Lorsque $\mu \notin \{1,2\}$, on a donc trois valeurs propres simples, lorsque $\mu = 1$, 1 est une valeur propre double et lorsque $\mu = 2$, 2 est une valeur propre double.

c. On constate que, quel que soit μ, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est la droite $\mathbb{R}(1,1,1)$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est la droite $\mathbb{R}(1,2,4)$. Lorsque $\mu \notin \{1,2\}$, le sous-espace propre associé à la valeur propre μ est la droite $\mathbb{R}(1,\mu,\mu^2)$.

2. On en déduit que l'endomorphisme n'est diagonalisable que lorsque $\mu \notin \{1,2\}$.

3. Lorsque $\mu \notin \{1,2\}$, les valeurs propres sont distinctes et le polynôme minimal est nécessairement $m(X) = (X-1)(X-2)(X-\mu)$. Lorsque $\mu = 1$, le polynôme minimal ne peut être que $(X-1)^2(X-2)$ ou $(X-1)(X-2)$, mais l'endomorphisme n'étant pas diagonalisable c'est nécessairement $(X-1)^2(X-2)$. Lorsque $\mu = 2$, le même raisonnement prouve que le polynôme minimal est $(X-1)(X-2)^2$. Dans tous les cas, le polynôme minimal est donc $m(X) = (X-1)(X-2)(X-\mu)$.

4. Lorsque $\mu \notin \{1,2\}$, la réduite de Jordan s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

On prend pour base

$$e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,2,4),\ e_3 = (1,\mu,\mu^2),$$

on a alors comme matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \mu \\ 1 & 4 & \mu^2 \end{pmatrix}.$$

et on vérifie que

PARTIEL 2007-08
CORRIGÉ page 2/3

$$P^{-1} = \frac{1}{\mu^2 - 3\mu + 2}\begin{pmatrix} 2\mu^2 - 4\mu & -\mu^2 + 4 & \mu - 2 \\ -\mu^2 + \mu & \mu^2 - 1 & -\mu + 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\mu = 1$, on obtiendra

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

en prenant une base (e_1, e_2, e_3) telle que $Te_1 = e_1, Te_2 = e_1 + e_2, Te_3 = e_3$, par exemple

$$e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (0,1,2),\ e_3 = (1,2,4),$$

on a alors comme matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En raisonnant de même pour $\mu = 2$, on a

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

pour

$$e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,2,4),\ e_3 = (0,1,4),$$

on a alors comme matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. D'après le cours, la solution générale est donnée par les formules suivantes

$$u_n = c_1 + c_2 2^n + c_3\mu^n \text{ si } \mu \notin \{1,2\},$$

$$u_n = c_1 + c_2 n + c_3 2^n \text{ si } \mu = 1,$$

$$u_n = c_1 + (c_2 + c_3 n)2^n \text{ si } \mu = 2.$$

PARTIEL 2007-08
CORRIGÉ page 3/3

où les c_i sont des réels arbitraires.

6. On constate que $X' = AX$ et que $Y' = P^{-1}APY$. On choisit pour matrice P les matrices de passage précédemment calculées.

Lorsque $\mu \notin \{1, 2\}$, en posant $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ on obtient le système

$$Y_1' = Y_1, Y_2' = 2Y_2, Y_3' = \mu Y_3,$$

d'où

$$Y_1 = c_1 e^t, Y_2 = c_2 e^{2t}, Y_3 = c_3 e^{\mu t}$$

et

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{\mu t}.$$

Pour $\mu = 1$, on a

$$Y_1' = Y_1 + Y_2, Y_2' = Y_2, Y_3' = 2Y_3,$$

d'où

$$Y_1 = (c_1 + c_2 t)e^t, Y_2 = c_2 e^t, Y_3 = c_3 e^{2t}$$

et

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t}.$$

Pour $\mu = 2$, en raisonnant de même on obtient

$$x(t) = c_1 e^t + (c_2 + c_3 t)e^{2t}.$$

CONTRÔLE TERMINAL
2007 - 08
SUJET

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Examen du Lundi 14 Janvier 2008 (durée 2 heures).
Document autorisé : résumé de cours.

Exercice 1 (5 points) On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3,\ x = (x_1, x_2, x_3).$$

1. En utilisant l'algorithme de Gauss, écrire Q sous la forme d'une somme de carrés de formes linéaires, linéairement indépendantes.
2. Quelle est la signature de Q ?
3. Exhiber une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de la forme polaire de Q est la matrice unité.

Exercice 2(8 points) L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. On considère l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant pour matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que T est une transformation orthogonale.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3\,;\, Tx = x\}.$$

3. Choisir une base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3)$ telle que e_3 engendre E.
4. Écrire la matrice représentative de T dans cette base.
5. Quelle est la nature géométrique de la transformation T ?

Exercice 3 (12 points) Soit E un espace euclidien de dimension n. On dit qu'un endomorphisme $T \in$ est antisymétrique si $T = -T^*$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques, ce sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

2. Montrer qu'un endomorphisme T est antisymétrique si, et seulement si, $(Tx|x) = 0$ pour tout $x \in E$ [pour vérifier que la condition est suffisante, on pourra introduire l'expression $(T(x+y)|x+y)$].

Dans ce qui suit, on note T un endomorphisme antisymétrique.

3,a. Montrer que 0 est la seule valeur propre (réelle) possible de T.
  b. Si n est impair, en déduire que T ne peut être inversible.
  c. En déduire que dim ImT est pair [on pourra introduire l'opérateur $T_1 \equiv T|_{ImT} \in \mathcal{L}(ImT)$].

4. Montrer que Ker $T = (\mathrm{Im\,T})^{\perp}$.
5. Montrer que T^2 est symétrique et que ses valeurs propres sont ≤ 0.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

CONTRÔLE TERMINAL
2007-08
CORRIGÉ
page 1/2.

TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Corrigé de l'examen du 14 Janvier 2008

Exercice 1 On a

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1+x_2)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 \\ &= (x_1+x_2)^2 + (x_2+2x_3)^2 + x_3^2, \end{aligned}$$

d'où

$$Q(x) = l_1(x)^2 + l_2(x)^2 + l_3(x)^2$$

où

$$l_1(x) = x_1 + x_2,\ l_2(x) = x_2 + 2x_3,\ l_3(x) = x_3$$

et on sait que ces formes linéaires sont linéairement indépendantes.

2. On en déduit que Q est de signature $(3, 0)$.

3. Posons

$$x_1' = x_1 + x_2,\ x_2' = x_2 + 2x_3,\ x_3' = x_3,$$

soit

$$x_1 = x_1' - x_2' + 2x_3',\ x_2 = x_2' - 2x_3',\ x_3 = x_3'.$$

Alors, en notant (e_1', e_2', e_3') la base de $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice de passage

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(x_1', x_2', x_3') sont les coordonnées de x dans cette base et vu que $Q(x) = {x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2$, la forme polaire de Q s'écrit $B(x, y) = x_1'y_1' + x_2'y_2' + x_3'y_3'$ et sa matrice représentative dans cette base (e_1', e_2', e_3') est la matrice unité.

Exercice 2

1. On vérifie que la matrice A est orthogonale.
2. La résolution du système linéaire $Ax = x$ conduit à $E = \mathbb{R}(1, 1, 1)$.
3. Pour base orthonormale on choisit, par exemple,

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0),\ e_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), e_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

4. On vérifie que

$$Te_1 = e_2,\ Te_2 = -e_1,\ Te_3 = e_3.$$

CONTRÔLE TERMINAL
2007.08 - CORRIGÉ
page 212.

La matrice représentative de T dans cette base est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Ceci montre que la transformation T est une rotation de $\pm\pi/2$ autour de la droite E.

Exercice 3

1. On a

$$T = \frac{T+T^*}{2} + \frac{T-T^*}{2} \text{ où } \frac{T+T^*}{2} \in \mathcal{S} \text{ et } \frac{T-T^*}{2} \in \mathcal{A}.$$

De plus, $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, ce qui permet de conclure.

2. Si T est antisymétrique

$$(Tx|x) = (x|T^*x) = -(Tx|x),$$

d'où $(Tx|x) = 0$. Réciproquement, supposons $(Tx|x) = 0$ pour tout x. On peut écrire

$$(T(x+y)|x+y) = (Tx|x) + (Tx|y) + (Ty|x) + (Ty|y),$$

d'où $(Tx|y) + (Ty|x) = 0$ vu l'hypothèse et ceci prouve que $T^* = -T$.

3,a.Supposons que $Tx = \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$, alors $0 = (Tx|x) = \lambda\|x\|^2$, d'où $\lambda = 0$.

b. Si n est impair, le polynôme caractéristique de T est de degré impair, donc admet au moins une racine réelle qui est nécessairement nulle d'après a., donc T n'est pas inversible.

c. L'opérateur T_1 est un endomorphisme surjectif de ImT, donc injectif, étant antisymétrique d'après 2. par exemple la dimension de ImT est nécessairement paire d'après b.

4. Montrons que tout $x \in \text{Ker } T$ est orthogonal à Im T : en effet, si $y = Tz \in \text{Im } T$, on a

$$(x|y) = (x|Tz) = (T^*x|z) = -(Tx|z) = 0.$$

Inversement, si $(x|Ty) = 0$ pour tout y, $0 = (T^*x|y) = -(Tx|y)$ pour tout y, d'où $Tx = 0$, soit $x \in \text{Ker } T$.

5. L'opérateur T^2 est symétrique, car $(T^2)^* = (T^*)^2 = T^2$. Si $T^2x = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$, on a

$$-\|Tx\|^2 = (T^2x|x) = \lambda\,\|x\|^2,$$

d'où $\lambda \leq 0$.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

CONTRÔLE TERMINAL
2007.08. SESSION 2.
SUJET.

TOULOUSE

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Examen du 27 Juin 2008 (durée 2 heures).
Document autorisé : résumé de cours.

Exercice 1 (10 points)

On considère l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant pour matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer successivement

a. le polynôme caractéristique de T,

b. les valeurs propres de T,

c. les sous-espaces propres de T.

2,a. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

b. Quel est le polynôme minimal de T ?

c. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de T et vérifier que leur somme est directe de somme $\mathbb{R}^3$.

3. Choisir une réduite de Jordan J de T et déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ telle que dans cette base J soit la matrice représentative de T.

Exercice 2 (10 points) Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie n, $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $x \in E, x \neq 0$. On note F le sous-espace vectoriel engendré par la suite de vecteurs $(T^j x)_{j\in\mathbb{N}}$ [on rappelle que $T^0 x = x$].

1. Montrer que l'ensemble P des entiers $p \geq 1$ tels que les $p+1$ vecteurs $(T^j x)_{0\leq j\leq p}$ soient liés est non vide.

On note p_0 le plus petit élément de P.

2. Montrer qu'il existe des réels uniques $(a_j)_{0\leq j\leq p_0-1}$ tels que

$$T^{p_0} x = \sum_{j=0}^{p_0-1} a_j T^j x.$$

3. Montrer que F est de dimension p_0 et que $B = (T^j x)_{0\leq j\leq p_0-1}$ en est une base.

4. Montrer que F est stable par T, c'est-à-dire que $T(F) \subset F$.

On pose $S = T|_F$

5,a. Déterminer la matrice représentative de S dans la base B.

b. Quel est le polynôme caractéristique de S ?

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE

CONTRÔLE TERMINAL
2007-08 SESSION 2
CORRIGÉ page 1/2.

LICENCE-L2

UE05- Algèbre linéaire

Corrigé de l'examen du 27 Juin 2008

Exercice 1 1,a. Le calcul du polynôme caractéristique conduit à $-\lambda(\lambda-1)^2$.

b. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$, cette dernière étant double.

c. Les sous-espaces propres sont $E_1 = (1,0,2)\mathbb{R}$ et $E_2 = (1,2,-1)\mathbb{R}$.

2,a. Le sous-espace propre E_2 étant de dimension 1, l'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

b. Le polynôme minimal ne peut être que $\lambda(\lambda-1)^2$ ou $\lambda(\lambda-1)$ et, vu a., il s'agit de $\lambda(\lambda-1)^2$.

c. Notons F_1 et F_2 les sous-espaces caractéristiques. On a $F_1 = \mathrm{Ker}A = E_1$ et on vérifie que $F_2 = \mathrm{Ker}(A-I)^2$ est le sous-espace vectoriel de dimension 2

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 3x-2y-z=0\}.$$

D'après le cours, on sait que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$. Ici, la vérification est immédiate vu que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $\mathrm{d}imF_1 + \mathrm{d}imF_2 = 3$.

3. On choisit pour réduite

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de construire une base (e_1, e_2, e_3) telle que

$$Te_1 = 0,\, Te_2 = e_2,\, Te_3 = e_2 + e_3.$$

On choisit $e_1 = (1,0,2)$ et $e_2 = (1,0,2)$. La résolution du système linéaire $Te_3 = e_2 + e_3$ donne $e_3 = (-3,-4,0)$.

Exercice 2 1. L'espace E étant de dimension n, P contient l'intervalle $[n, +\infty[$.

2. D'après la définition de p_0, il existe une relation de liaison entre les vecteurs $(T^j x)_{0\leq j \leq p_0}$ et le coefficient de $T^{p_0}x$ est non nul, les p_0 vecteurs $(T^j x)_{0 \leq j \leq p_0 - 1}$ étant linéairement indépendants. Ceci prouve le résultat voulu, l'unicité des a_j résultant de l'indépendance mentionnée ci-dessus.

3. Les vecteurs p_0 vecteurs linéairement indépendants engndrent un s.e.v. G de dimension p_0 et en constituent une base. Il suffit de vérifier que $F = G$. On a évidemment $G \subset F$. On vérifie par récurrence que $T^{p_0+k}x \in G$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Ceci est vrai pour $k = 0$ d'après 2. Supposons la propriété établie pour $0 \leq k \leq l$, alors

$$T^{p_0+l+1}x = \sum_{j=0}^{p_0-1} a_j T^{j+l+1}x$$

où $j+l+1 \leq p_0+l$, d'où $T^{p_0+l+1}x \in G$ d'après l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de conclure.

CONTRÔLE TERMINAL 2007-08 SESSION 2.
CORRIGÉ page 2/2

4. est évident.

5,a. La matrice représentative de S dans la base B s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{p_0-1} \end{pmatrix}.$$

b. La transposée de A est la matrice apparaissant lors de l'étude des récurrences linéaires et on a calculé son polynôme caractéristique qui vaut $(-1)^{p_0}(\lambda^{p_0} - \sum_{j=0}^{p_0-1} a_j \lambda^j)$.