

# Một số điều nên và không nên trong giảng dạy toán

Đây là loại bài gồm 12 phần về dạy toán mà tôi viết vào quãng 06-07/2009. Do có lẽ chúng vẫn còn tính thời sự nên tôi tổng hợp lại đây để cho những ai quan tâm dễ theo dõi. Loại bài này cũng đã được TS Trần Nam Dũng và nhóm biên soạn của anh rút gọn lại và đăng trên « Kỷ yếu toán học 2009 ». Các bạn đọc loạt bài này trên trang web của tôi có trao đổi thảo luận nhiều điều thú vị liên quan đến việc dạy toán, ai tò mò có thể vào trang web của tôi xem trực tiếp (bấm vào các hyperlink ở đầu mỗi phần).

Ngoài ra, tôi có cho thêm vào văn bản này, như là phụ lục, một số đoạn lẻ tẻ khác mà tôi viết về việc dạy toán, trong đó có ví dụ về xây dựng tập các số thực, vai trò của hài hước trong giảng dạy, v.v.

Nguyễn Tiến Dũng, Toulouse, 30/07/2012

---

## Phần 1:

Trong loạt bài này, tôi sẽ viết dẫn một số quan điểm của tôi về những điều nên và không nên trong giảng dạy. Những quan điểm này được rút ra từ kinh nghiệm bản thân, việc nghiên cứu các liệu về giáo dục, sự trao đổi với đồng nghiệp và sinh viên, và những suy nghĩ để làm sao dạy học tốt hơn. Tất nhiên có những quan điểm của tôi có thể còn phiến diện. Xin mời mọi người trao đổi, viết lên những quan điểm và kinh nghiệm của mình.

Tôi sẽ chủ yếu nói về việc dạy toán, tuy rằng nhiều điểm áp dụng được cho hầu hết các môn học khác. Tôi sẽ dùng từ “giảng viên” để chỉ cả giảng viên đại học lẫn giáo viên phổ thông, từ “học sinh” (student) để chỉ học sinh sinh viên hay học viên ở mọi cấp học, từ phổ thông cho đến sau đại học. Tôi viết không theo thứ tự đặc biệt nào.

**Nên:** *Thỉnh thoảng thay đổi môn dạy nếu có thể. Nếu dạy một môn nhiều lần, thì cải tiến thường xuyên phương pháp và nội dung dạy môn đó.*

**Không nên:** *Dạy mãi năm này qua năm khác một môn, với giáo trình nhiều năm không thay đổi.*

Các chức vụ quản lý lãnh đạo thường có nhiệm kỳ, và thường có nguyên tắc là không ai làm quá 2 nhiệm kỳ ở cùng 1 vị trí. Lý do là để tạo sự thay đổi cải tiến thường xuyên, tránh sự trì trệ. Ngay trong việc dạy học cũng vậy: một người mà dạy quá nhiều năm cùng một thứ, thì dễ dẫn đến nhàm chán trì trệ. Để tránh chuyện đó, có những cơ sở đại học có qui định là các môn học cũng có nhiệm kỳ: ai mà dạy môn nào đó được 4-5 năm rồi thì phải giao cho người khác đảm nhiệm, trừ trường hợp không tìm được người thay thế.

Nhiều khoa toán có phân chia việc dạy các môn cho các tổ bộ môn, ví dụ môn

“phương trình vi phân” thì chỉ dành cho người của tổ bộ môn phương trình vi phân dạy. Việc phân chia như vậy có cái lợi là đảm bảo chất lượng dạy, đặc biệt là trong điều kiện trình độ giảng viên nói chung còn thấp, phải “chuyên môn hóa” trong việc dạy để đảm bảo chất lượng tối thiểu. Tuy nhiên nó có điểm hạn chế, là nó tạo ra xu hướng người của tổ bộ môn nào sẽ chỉ biết chuyên ngành hẹp đấy, tầm nhìn không mở rộng ra. Ở một số trường đại học tiên tiến, nơi có nhiều giảng viên trình độ cao (và với nguyên tắc là đã là giáo sư hay giảng viên cao cấp thì đủ trình độ để dạy bất cứ môn nào trong các môn toán bắt buộc ở bậc cử nhân), công việc giảng dạy không phân chia theo tổ bộ môn hẹp như vậy, mà giảng viên (cao cấp) nào cũng có thể đăng ký dạy bất cứ môn nào ở bậc cử nhân.

Tất nhiên, việc thay đổi môn dạy đòi hỏi các giảng viên phải cố gắng hơn trong việc chuẩn bị bài giảng (mỗi lần đổi môn dạy, là một lần phải chuẩn bị bài giảng gần như từ đầu), nhưng đổi lại nó làm tăng trình độ của bản thân giảng viên, giúp cho giảng viên tìm hiểu những cái mới (mà nếu không đổi môn dạy thì sẽ không tìm hiểu, do sức ỳ). Đặc biệt là các môn ở bậc cao học: việc chuẩn bị bài giảng cho một môn cao học mới có thể giúp ích trực tiếp cho việc nghiên cứu khoa học của giảng viên.

Tôi có một số kinh nghiệm cá nhân về việc này. Ví dụ như một lần năm 1999 tôi nhận dạy 1 học kỳ cao học về hệ động lực Hamilton, và trong quá trình đọc tài liệu để chuẩn bị bài giảng cho môn đó, tôi phát hiện ra một số vấn đề cơ bản liên quan đến dạng chuẩn địa phương của hệ động lực chưa được nghiên cứu, và điều đó thúc đẩy tôi nghiên cứu được một số kết quả khá tốt. Năm 2008 tôi nhận dạy môn đại số (mở rộng trường và một ít đại số giao hoán) cho sinh viên toán năm thứ 4, tuy rằng trước đó tôi hầu như không đụng chạm đến những thứ đó. Việc dạy môn đại số đã giúp tôi nắm chắc thêm được một số kiến thức về đại số, ví dụ như hiểu thêm ý nghĩa của tính chất Noether (đây là tính chất đặc trưng của “đại số”, đối ngược với “giải tích”).

Tất nhiên có nhiều người, do điều kiện công việc, phải dạy cùng một môn (ví dụ như môn Toán lớp 12) trong nhiều năm. Để tránh trì trệ trong trường hợp đó, cần thường xuyên cải tiến phương pháp và nội dung giảng dạy (đưa vào những ví dụ minh họa mới và bài tập mới từ thực tế hiện tại, sử dụng những công nghệ mới và công cụ học tập mới, tìm các cách giải thích mới dễ hiểu hơn, v.v.)

---

## Phần 2:

**Nên:** *Dạy và kiểm tra kiến thức học sinh theo lối “học để hiểu”*

**Không nên:** *Tạo cho học sinh thói quen học vẹt, chỉ nhớ mà không hiểu*

Các nhà giáo dục học và thần kinh học trên thế giới đã làm nhiều phân tích và thí nghiệm cho thấy, khi bộ óc con người “hiểu” một cái gì đó (tức là có thể “make sense” cái đó, liên tưởng được với những kiến thức và thông tin khác đã có sẵn trong não) thì dễ nhớ nó (do thiết lập được nhiều “dây nối” liên quan đến kiến thức đó trong mạng thần kinh của não — một neuron thần kinh có thể có hàng chục nghìn dây nối đến các neuron khác), còn khi chỉ cố nhồi nhét các thông tin riêng lẻ vào não (kiểu học vẹt) mà không liên hệ được với các kiến thức khác đã có trong não, thì thông tin đó rất khó nhớ, dễ bị não đào thải.

Thực ra thì môn học nào cũng cần “hiểu” và “nhớ”, tuy rằng tỷ lệ giữa “hiểu”

và “nhớ” giữa các môn khác nhau có khác nhau: ví dụ như ngoại ngữ thì không có gì phức tạp khó hiểu lắm nhưng cần nhớ nhiều (tất nhiên để nhớ được các câu chữ ngoại ngữ thì cũng phải liên tưởng được các câu chữ đó với hình ảnh hay ý nghĩa của chúng và với những thứ khác có trong não), nhưng toán học thì ngược lại: không cần nhớ nhiều lắm, nhưng phải hiểu được các kiến thức, và quá trình hiểu đó đòi hỏi nhiều công sức thời gian. Có những công thức và định nghĩa toán mà nếu chúng ta quên đi chúng ta vẫn có thể tự tìm lại được và dùng được nếu đã hiểu bản chất của công thức và định nghĩa đó, còn nếu chúng ta chỉ nhớ công thức và định nghĩa đó như con vẹt mà không hiểu nó, thì cũng không dùng được nó, và như vậy thì cũng không hơn gì người chưa từng biết nó. Ví dụ như công thức tính Christoffel symbol cho liên thông Riemann của một Riemannian metric là một công thức hơi dài, và tôi chẳng bao giờ nhớ được chính xác nó lâu tuy “mang tiếng” là người làm hình học vi phân: cứ mỗi lần đụng đến thì xem lại, nhớ được một lúc, rồi lại quên. Nhưng điều đó không làm tôi băn khoăn, vì tôi hiểu bản chất của Christoffel symbol và các tính chất cơ bản của liên thông Riemann, từ đó có thể tự nghĩ ra lại được công thức nếu cần thiết (tốn một vài phút) hoặc tra trên internet ra ngay. Sinh viên ngày nay (là những chuyên gia của ngày mai) có thể tra cứu rất nhanh mọi định nghĩa, công thức, v.v., nhưng để hiểu chúng thì vẫn phải tự hiểu, không có máy móc nào hiểu hộ được. Cách đây 5-10 năm, theo thông lệ của những người dạy trước tôi, tôi thường không cho phép sinh viên mang tài liệu vào phòng thi trong các kỳ thi cuối học kỳ, và đề bài thi hay có 1 câu hỏi lý thuyết (tức là phát biểu đúng 1 định nghĩa hay định lý gì đó thì được điểm). Nhưng trong thời đại mới, việc nhớ y nguyên các định nghĩa và định lý có ít giá trị, mà cái chính là phải hiểu để mà sử dụng được chúng. Bởi vậy những năm gần đây, trong các kỳ thi tôi dần dần cho phép học sinh mang bất cứ tài liệu nào vào phòng thi, và đề thi không còn các câu hỏi “phát biểu định lý” nữa. Thay vào đó là những bài tập (tương đối đơn giản, và thường gần giống các bài có trong các tài liệu nhưng đã thay tham số) để kiểm tra xem học sinh có hiểu và sử dụng được các kiến thức cơ bản không.

Về mặt hình thức, chương trình học ở Việt Nam (kể cả bậc phổ thông lẫn bậc đại học) khá nặng, nhưng là nặng về “nhớ” mà nhẹ về “hiểu”, và trình độ trung bình của học sinh Việt Nam thì yếu so với thế giới (tất nhiên vẫn có học sinh rất giỏi, nhưng tỷ lệ học sinh giỏi thực sự rất ít, và cũng khó so được với giỏi của phương Tây). Vấn đề không phải là do người Việt Nam sinh ra kém thông minh, mà là do điều kiện và phương pháp giáo dục, chứ trẻ em gốc Việt Nam lớn lên ở nước ngoài thường là thành công trong đường học hành. Hiện tượng rất phổ biến ở Việt Nam là học sinh học thuộc lòng các “kiến thức” trước mỗi kỳ kiểm tra, rồi sau khi kiểm tra xong thì “chữ thầy trả thầy”. Việt Nam rất cần cải cách chương trình giáo dục theo hướng tăng sự “hiểu” lên, và giảm sự “học gạo”, “nhớ như con vẹt”. Tôi có phỏng vấn nhiều sinh viên tốt nghiệp loại giỏi ngành toán ở Việt Nam, nhưng khi hỏi một số kiến thức khá cơ bản thì nhiều em lại không biết. Lỗi không phải tại các em mà có lẽ tại hệ thống giáo dục. Nhiều thầy cô giáo chỉ khuyến khích học sinh làm bài kiểm tra giống hệt lời giải mẫu của mình, chứ làm kiểu khác đi, tuy có thể thú vị hơn cách của thầy thì có khi lại bị trừ điểm. Tôi đã chứng kiến trường hợp sinh viên chỉ đạt điểm thi 7-8 lại giỏi hơn sinh viên đạt điểm thi 9-10 vì kiểu chấm thi như vậy. Kiểu chấm điểm như thế chỉ khuyến khích học vẹt chứ không khuyến khích sự sáng tạo hiểu biết.

---

### Phân 3:

**Nên:** *Dạy những cái cơ bản nhất, nhiều công dụng nhất*

**Không nên:** *Mất nhiều thời giờ vào những thứ ít hoặc không dùng đến*

Trên đời có rất nhiều cái để học, trong khi thời gian và sức lực của chúng ta có hạn, và bởi vậy chúng ta luôn phải lựa chọn xem nên học (hay dạy học) cái gì. Nếu chúng ta phung phí quá nhiều thời gian vào những cái ít công dụng (hoặc thậm chí phản tác dụng, ví dụ như những lý thuyết về chính trị hay kinh tế trái ngược với thực tế), thì sẽ không còn đủ thời gian để học (hay dạy học) những cái quan trọng hơn, hữu ích hơn.

Tất nhiên, mức độ “quan trọng, hữu ích” của từng kiến thức đối với mỗi người khác nhau thì khác nhau, và phụ thuộc vào nhiều yếu tố như thời gian, hoàn cảnh, sở trường, v.v. Ví dụ như học nói và viết tiếng Việt cho đảng hoàng là không thể thiếu với người Việt, nhưng lại không cần thiết với người Nga.

Những người muốn làm nghề toán thì phải học nhiều về toán, còn sinh viên đại học các ngành khác nói chung chỉ cần học một số kiến thức toán cao cấp cơ bản nhất mà sẽ cần trong công việc của họ. Những người muốn làm toán ứng dụng, thì ngoài các môn toán, cần phải học các môn mà họ định mang toán ứng dụng vào đó.

Ngay trong các môn toán, không phải các kiến thức nào cũng quan trọng như nhau. Và “độ quan trọng” và “độ phức tạp” là hai khái niệm khác nhau: không phải cái gì quan trọng cũng phức tạp khó hiểu, và không phải cái gì rắc rối khó hiểu cũng quan trọng. Giảng viên cần tránh dẫn dắt học sinh lao đầu vào những cái rắc rối phức tạp nhưng ít công dụng. Thay vào đó, cần dành nhiều thời gian cho những cái cơ bản, nhiều công dụng nhất. Nếu là cái vừa cơ bản và vừa khó, thì lại càng cần dành đủ thời gian cho nó, vì khó nắm bắt được nó tức là nắm bắt được một công cụ mạnh.

Một ví dụ là đạo hàm và tích phân. Đây là những khái niệm cơ bản vô cùng quan trọng trong toán học. Học sinh cần hiểu định nghĩa, bản chất và công dụng của chúng, và nắm được một số nguyên tắc cơ bản và công thức đơn giản, ví dụ như nguyên tắc Leibniz cho đạo hàm của một tích, hay công thức “đạo hàm của  $\sin x$  bằng  $\cos x$ ”. Tuy nhiên nếu bắt học sinh học thuộc hàng trăm công thức tính đạo hàm và tích phân khác nhau, thì sẽ tốn thời gian vô ích vì phần lớn các công thức thức đó sẽ không dùng đến sau này, hoặc nếu dùng đến thì có thể tra cứu được dễ dàng. Một lần tôi thấy có một sách tiếng Việt về tính tích phân cho học sinh, dày hơn 150 trang, với rất nhiều công thức phức tạp dài dòng (ví dụ như công thức tính tích phân của một hàm số có dạng thương của hai biểu thức lượng giác), mà ngay những người làm toán chuyên nghiệp cũng rất hiếm khi cần đến. Thay vì tốn nhiều thời gian vào những công thức phức tạp mà không cần dùng đó, học những thứ cơ bản khác sẽ có ích hơn.

Một lần nhà xuất bản Springer có lần nhờ tôi làm phản biện cho 1 quyển sách về hình học vi phân và ứng dụng. Tôi đã khuyên Springer không in sách đó, và một trong các lý do là quyển sách chứa quá nhiều khái niệm mà ngay trong sách đó cũng không dùng đến. Ví dụ như khái niệm “không gian Lindeloff” được đưa vào ngay ở đầu sách, phát biểu thành 1 định nghĩa có đánh số hỏi (chứ không phải là chỉ nhắc qua nó trong một “remark”), nhưng không dùng đến nó lúc nào trong sách, tôi không hiểu người viết sách đưa định nghĩa đó vào trong sách để làm gì.

Một ví dụ khác: các bất đẳng thức. Có những bất đẳng thức “có tên tuổi”, không phải vì nó “khó”, mà là vì nó có ý nghĩa (nó xuất hiện trong các vấn đề hình học, số học, phương trình vi phân, v.v.). Chứ nếu học một đống hàng ngàn

bất đẳng thức mà không biết chúng dùng để làm gì, thì khá là phí thời gian. Phần lớn các bất đẳng thức (không kể các bất đẳng thức có tính tổ hợp) có thể được chứng minh khá dễ dàng bằng một phương pháp cơ bản, là phương pháp dùng đạo hàm hoặc sai phân. Phương pháp này học sinh phổ thông có thể học được, nhưng thay vào đó học sinh lại được học các kiểu mẹo mực để chứng minh bất đẳng thức. Các mẹo mực có ít công dụng, chỉ dùng được cho bài toán này nhưng không dùng được cho bài toán khác (bởi vậy mới là “mẹo mực” chứ không phải “phương pháp”). “Mẹo mực” có thể làm cho cuộc sống thêm phong phú, nhưng nếu mất quá nhiều thời gian vào “mẹo mực” thì không còn thời gian cho những cái cơ bản hơn, giúp tiến xa hơn. Như là trong công nghệ, có cải tiến cái đèn dầu đến mấy thì nó cũng không thể trở thành đèn điện. Hồi còn nhỏ, có lần tôi đi thi học sinh giỏi (lớp 6 ?), có bài toán tìm cực đại. Tôi dùng đạo hàm tính ngay ra điểm cực đại, và có bạn khác cùng lớp cũng biết làm như vậy. Cách làm đó là do chúng tôi tự đọc sách mà ra chứ không được dạy. Nhưng khi viết lời giải thì lại phải giả vờ “đoán mò” điểm cực đại, rồi viết hàm số dưới dạng một số (giá trị tại điểm đó) cộng với một biểu thức hiển nhiên là không âm (ví dụ như vì có dạng bình phương) thì mới được điểm, chứ nếu viết đạo hàm thì mất hết điểm. Nếu như thầy giáo trừ điểm học sinh, vì học sinh giải bài thi bằng một phương pháp “cơ bản” nhưng “không có trong sách thầy”, thì điều đó sẽ góp phần làm cho học sinh học mẹo mực, thiếu cơ bản.

Qua phỏng vấn một số sinh viên đại học và cao học ngành toán của Việt Nam, tôi thấy họ được học nhiều môn “cao cấp”, nhưng vẫn thiếu kiến thức cơ bản. Ví dụ như họ học giải tích hàm, với những định lý trừu tượng khá là khó. Nhưng họ lại không biết công thức Parseval cho chuỗi Fourier là gì, trong khi chuỗi Fourier là một trong những khái niệm giải tích cơ bản và nhiều ứng dụng nhất của toán. Tôi không có ý nói giải tích hàm là “không cơ bản”. Nó là thứ cần thiết. Nhưng nếu những khái niệm và định lý của giải tích hàm chỉ được học một cách hình thức, không có liên hệ với chuỗi Fourier hay với các ví dụ cụ thể khác, thì đó là học “trên mây trên gió”.

---

#### Phần 4 :

**Nên:** *Giải thích bản chất và công dụng của các khái niệm mới một cách trực giác, đơn giản nhất có thể, dựa trên sự liên tưởng tới những cái mà học sinh đã từng biết.*

**Không nên:** *Đưa ra các khái niệm mới bằng các định nghĩa hình thức, phức tạp, tối nghĩa.*

Các khái niệm toán học quan trọng đều có mục đích và ý nghĩa khi chúng được tạo ra. Và không có một khái niệm toán học quan trọng nào mà bản thân nó quá khó đến mức không thể hiểu được. Nó chỉ trở nên quá khó trong hai trường hợp: 1) người học chưa có đủ kiến thức chuẩn bị trước khi học khái niệm đó; 2) nó được giải thích một cách quá hình thức, rắc rối khó hiểu. Trong trường hợp thứ nhất, người học phải được hướng tới học những kiến thức chuẩn bị (ví dụ như trước khi học về các quá trình ngẫu nhiên phải có kiến thức cơ sở về xác suất và giải tích). Trong trường hợp thứ hai, lỗi thuộc về người dạy học và người viết sách dùng để học.

Các nghiên cứu về thần kinh học (neuroscience) cho thấy bộ nhớ “ngắn hạn” của não thì rất nhỏ (mỗi lúc chỉ chứa được khoảng 7 đơn vị thông tin ?), còn bộ nhớ dài hạn hơn thì chạy chậm. Thế nào là một đơn vị thông tin ? Tôi không có

định nghĩa chính xác ở đây, nhưng ví dụ như dòng chữ “TON CHEVAL EST BANAL” đối với một người Pháp thì nó là một câu tiếng Pháp chỉ chứa không quá 4 đơn vị thông tin, rất dễ nhớ, trong khi đối với một người Việt không biết tiếng Pháp thì dòng chữ đó chứa đến hàng chục đơn vị thông tin – mỗi chữ cái là một đơn vị thông tin – rất khó nhớ. Một định nghĩa toán học, nếu quá dài và chứa quá nhiều đơn vị thông tin mới trong đó, thì học sinh sẽ rất khó khăn để hình dung toàn bộ định nghĩa đó, và như thế thì cũng rất khó hiểu định nghĩa. Muốn cho học sinh hiểu được một khái niệm mới, thì cần phát biểu nó một cách sao cho nó dùng đến một lượng đơn vị thông tin mới ít nhất có thể (không quá 7 ?). Để giảm thiểu lượng đơn vị thông tin mới, cần vận dụng, liên tưởng tới những cái mà học sinh đã biết, dễ hình dung. Đấy cũng là cách mà các “cha đạo” giảng đạo cho “con chiên”: dùng ngôn ngữ giản dị, mà con chiên có thể hiểu được, để giảng giải những “tư tưởng lớn”. Khi có một khái niệm mới rất phức tạp, thì phải “chặt” nó thành các khái niệm nhỏ đơn giản hơn, dạy học các khái niệm đơn giản hơn trước, rồi xây dựng khái niệm phức tạp trên cơ sở các khái niệm đơn giản hơn đó (sau khi đã biến mỗi khái niệm đơn giản hơn thành “một đơn vị thông tin”).

Ví dụ: khái niệm “nhóm”. Có (ít nhất) 2 cách định nghĩa khác nhau thế nào là một nhóm.

Cách 1: Một nhóm là một tập hợp, với 2 phép tính (phép nhân và phép nghịch đảo), một phần tử đặc biệt (phần tử đơn vị), thỏa mãn 4-5 tiên đề gì đó. Cách 2: một nhóm là tập hợp các “đối xứng” (hay nói “rộng hơn” là các phép biến đổi bảo toàn một số tính chất) của một vật. Cách 1 chính xác về mặt toán học, nhưng dài, khó nhớ, khó hiểu với người mới gặp khái niệm nhóm lần đầu. Cách 2 trực giác hơn, cho ngay được nhiều ví dụ minh họa cụ thể (ví dụ như nhóm các đối xứng của hình lập phương, nhóm các biến đổi tuyến tính của  $R^3$ , v.v.). Tuy rằng cách thứ hai này “thiếu chặt chẽ” về toán học (không thấy phép nhân đâu trong định nghĩa – thực ra phép nhân chẳng qua là phép “composition” tự nhiên của các đối xứng hay biến đổi), nhưng nó phản ánh đúng bản chất vấn đề của khái niệm nhóm, và nó cần dùng lượng một thông tin mới ít hơn nhiều so với cách 1. Tất nhiên toán học cần sự chặt chẽ logic. Nhưng sự chặt chẽ logic đó sẽ đến sau khi đã hiểu bản chất vấn đề (học sinh khi đã hiểu định nghĩa 2, thì sẽ hiểu ngay định nghĩa 1 chẳng qua là nhằm hình thức hóa một cách chặt chẽ định nghĩa 2), chứ không phải ngược lại.

Nói theo nhà toán học nổi tiếng V.I. Arnold, thì một định nghĩa tốt là 5 ví dụ tốt. Định nghĩa nào mà không có ví dụ minh họa thì “đáng ngờ”. Đi kèm với những khái niệm mới, định nghĩa mới, luôn cần những ví dụ minh họa (hay bài tập) cụ thể để thể hiện bản chất, ý nghĩa của khái niệm, định nghĩa đó. Chẳng hạn như khái niệm đa tạp khả vi. Ví dụ minh họa tiêu biểu nhất (và vì sao có từ “atlas” trong định nghĩa đa tạp) chính là bề mặt trái đất (hình dung như mặt cầu) cùng với một tệp bản đồ phủ toàn bộ trái đất. Một ví dụ tự nhiên khác của đa tạp khả vi, là tập tất cả các trạng thái vị trí của một vật thể (như máy bay, ô tô, cốc chén, ...). Nếu định nghĩa một cấu trúc đa tạp khả vi là “một lớp tương đương của các atlas khả vi” thì đúng về mặt hình thức toán học, nhưng rắc rối khó hiểu, trong thực tế chỉ cần 1 atlas khả vi là đủ.

Có những khái niệm toán học “rất khó hiểu”, không phải vì bản thân nó “quá khó hiểu”, mà là bởi vì nó được trình bày một cách rắc rối tối nghĩa. Một ví dụ tiêu biểu là “dãy phổ” (spectral sequence) trong đại số đồng điều và topo đại số, mà ngay trong số những người làm toán chuyên nghiệp cũng có rất nhiều người không hiểu nó. Phần lớn các sách khi viết về dãy phổ thì “bỏ bom” cho người đọc một dãy ma trận  $E^n_{pq}$  và một “phép phù thủy” để chuyển từ  $E^n$  sang  $E^{n+1}$ , mà không giải thích được rõ ràng tại sao. Trong khi đó,

các ý tưởng xuất phát điểm của dãy phổ thực ra rất là trong sáng, và nếu đi theo các ý tưởng đó một cách tự nhiên để tìm ra dãy phổ thì sẽ thấy dãy phổ không có gì khó hiểu. (Khi có filtration thì đối đồng điều có thể được chắt ra nhiều khúc nhỏ bằng filtration đó, và có thể tính từng khúc nhỏ qua phương pháp “gần đúng”, khi lấy giới hạn thì được phép tính chính xác - “phép phù thủy” nhắc đến lúc trước, chẳng qua là projection của cùng 1 cái differential ban đầu lên những không gian gần đúng khác nhau).

Bản thân tôi khi đọc các tài liệu toán cũng rất vất vả chắt vật để hiểu các khái niệm trong đó, và tất nhiên có nhiều khái niệm đến bây giờ tôi vẫn không hiểu và có thể sẽ không bao giờ hiểu. Có những khi hiểu ra rồi thì lại thấy “nó đơn giản mà tại sao người ta viết nó rắc rối thế”. Một đồng nghiệp của tôi kể: đọc các sách về cơ học cổ điển, không hiểu gì hết, cho đến khi đọc quyển sách của ông Arnold thì mới hiểu, vì ông ta viết cũng từng đấy thứ như trong các sách khác, nhưng sáng sủa hơn hẳn. Nhiều sách về xác suất thống kê có lẽ cũng ở tình trạng tương tự: hình thức, phức tạp mà không thể hiện rõ bản chất của các khái niệm. Tất nhiên cũng có sách về xác suất thống kê viết dễ hiểu, giải thích được đúng bản chất nhiều khái niệm mà không cần phải dùng đến những ngôn ngữ toán học “đao to búa lớn”.

Trên thế giới, có nhiều người mà dường như “nghề” của họ là biến cái dễ hiểu thành cái khó hiểu, biến cái đơn giản thành cái rối ren. Những người làm quảng cáo, thì khiến cho người tiêu dùng không phân biệt nổi hàng nào là tốt thật đối với họ nữa. Những người làm thuế, thì để ra một bộ thuế rắc rối người thường không hiểu nổi, với một tỷ lỗ hồng trong đó, v.v. Ngay trong khoa học, có những người có quan niệm rằng cứ phải “phức tạp hóa” thì mới “quan trọng”. Thay vì nói “Vô va rửa tay” thì họ nói “có 1 phần tử người, mà ảnh qua ánh xạ tên gọi là Vô va, tại một thời điểm T, làm một động tác, thuộc phạm trù rửa, ...” Nhưng mà một người “thầy” thực sự, phải làm cho những cái khó hiểu trở nên dễ hiểu đối với học trò.

---

## Phân 5 :

**Nên:** *Luôn luôn quan tâm đến câu hỏi “để làm gì ?”*

**Không nên:** *Không cho học sinh biết họ học những thứ giảng viên dạy để làm gì, hay tệ hơn là bản thân giảng viên cũng không biết để làm gì.*

Quá trình học (tiếp thu thông tin, kiến thức và kỹ năng mới) là một quá trình tự nhiên và liên tục của con người trong suốt cuộc đời, xảy ra ở mọi nơi mọi lúc (ngay cả giấc ngủ cũng góp phần trong việc học) chứ không phải chỉ ở trường hay khi làm bài tập về nhà. Những cái mà bộ não chúng ta tiếp thu nhanh nhất là những cái mà chúng ta thấy thích, và/hoặc thấy dễ hiểu, và/hoặc thấy quan trọng. Ngược lại, những cái mà chúng ta thấy nhàm chán, vô nghĩa, không quan trọng, sẽ bị bộ não đào thải không giữ lại, dù có cố nhồi vào. Bởi vậy, muốn cho học sinh tiếp thu tốt một kiến thức nào đó, cần làm cho học sinh có được ít nhất một trong mấy điều sau: 1) thích thú tò mò tìm hiểu kiến thức đó; 2) thấy cái đó là có nghĩa (liên hệ được nhiều với những hiểu biết và thông tin khác mà học sinh đã có trong đầu); 3) thấy cái đó là quan trọng (cần thiết, có nhiều ứng dụng). Tất nhiên 3 điểm đó liên quan tới nhau. Ở đây tôi chủ yếu nói đến điểm thứ 3, tức là làm sao để học sinh thấy rằng những cái họ được học là quan trọng, cần thiết.

Một kiến thức đáng học là một kiến thức có ích gì đó, “để làm gì đó”. Nếu như học sinh học một kiến thức với lý do duy nhất là “để thi đỗ” chứ không còn lý do

nào khác, thì khi thi đỗ xong rồi kiến thức sẽ dễ bị đào thải khỏi não. Những môn thực sự đáng học, là những môn, mà kể cả nếu không phải thi, học sinh vẫn muốn được học, vì nó đem lại sự hiểu biết mà học sinh muốn có được và những kỹ năng cần cho cuộc sống và công việc của học sinh sau này. Còn những môn mà học “chỉ để thi đỗ” có lẽ là những môn không đáng học.

Cũng may là phần lớn giảng viên không rơi vào tình trạng “dạy môn không đáng học”, mà là dạy môn học đáng học, với một chương trình gồm các kiến thức đáng học. Tuy nhiên, giảng viên có thể biết là “học chúng để làm gì”, “vì sao đáng học”, trong khi mà học sinh chưa chắc đã biết. Chính bởi vậy luôn cần đặt câu hỏi “để làm gì”, khuyến khích học sinh đặt câu hỏi đó, và tìm những trả lời cho câu hỏi đó. Một trả lời giáo điều chung chung kiểu “nó quan trọng, phải học nó” ít có giá trị, mà cần có những trả lời cụ thể hơn, “nó quan trọng ở chỗ nào, dùng được vào trong những tình huống nào, đem lại các kỹ năng gì, v.v.”

Tiếc rằng việc giải thích ý nghĩa và công dụng của các kiến thức cho học sinh còn bị coi nhẹ, không chỉ ở Việt Nam. Có lần tôi hỏi một lớp đại học ngành toán đang học đại số tuyến tính ở Việt Nam là “đại số tuyến tính dùng làm gì?”. Họ trả lời là không biết. Có lần tôi hỏi một nhóm sinh viên ngành “Life Sciences” ở Pháp mới học xong môn phương trình vi phân tuyến tính, rằng họ có biết ví dụ phương trình nào xuất phát từ các vấn đề thực tế không. Họ cũng trả lời là không hề biết. Nếu như giảng viên giới thiệu cho học sinh biết các công dụng của những kiến thức họ được học qua các ví dụ (ví dụ như những phương trình vi phân tuyến tính xuất hiện thế nào trong các mô hình về tăng trưởng), thì có thể họ sẽ thấy những cái họ học có nghĩa hơn, đáng để học hơn, để nhớ hơn.

Trong công việc sau này của học sinh khi đã ra trường, thì câu hỏi “để làm gì” lại càng đặc biệt quan trọng. Mọi hoạt động của một tổ chức hay doanh nghiệp tất nhiên đều phải có mục đích. Ngay trong công việc nghiên cứu khoa học, có nhiều người không làm được kết quả nghiên cứu quan trọng nào (tạm định nghĩa quan trọng = được nhiều người khác sử dụng) không phải là vì “dốt” mà là vì “không biết lựa chọn vấn đề để nghiên cứu”, mất thời giờ nghiên cứu vào những cái ít ý nghĩa, ít ai quan tâm đến. Bởi vậy học sinh cần làm quen với việc sử dụng câu hỏi “để làm gì” từ khi đi học, như một vũ khí lợi hại trong việc chọn lựa các quyết định của mình.

---

## Phần 6 :

**Nên:** *Tổ chức thi cử sao cho nhẹ nhàng nhất, phản ánh đúng trình độ học sinh, và khiến cho học sinh học tốt nhất.*

**Không nên:** *Chạy theo thành tích, hay tệ hơn là gian trá và khuyến khích gian trá trong thi cử.*

Việc kiểm tra đánh giá trình độ và kết quả học tập của học sinh (cũng như trình độ và kết quả làm việc của người lớn) là việc cần thiết. Nó cần thiết bởi có rất nhiều quyết định phải dựa trên những sự kiểm tra và đánh giá đó, ví dụ như học sinh có đủ trình độ để có thể hiểu những môn học tiếp theo không, có đáng tin tưởng để giao một việc nào đó cho không, có xứng đáng được nhận học bổng hay giải thưởng nào đó không, v.v. Bởi vậy giảng viên không thể tránh khỏi việc tổ chức kiểm tra, thi cử cho học sinh. Cái chúng ta có thể tránh, đó là làm sao để đừng biến các cuộc kiểm tra thi cử đó thành “sự tra tấn” học sinh, và có khi cả giảng viên.



Một “định luật” trong giáo dục là THI SAO HỌC VẬY. Tuy mục đích cao cả dài hạn của việc học là để mở mang hiểu biết và rèn luyện kỹ năng, nhưng phần lớn học sinh học theo mục đích ngắn hạn, tức là để thi cho đỗ hay cho được giải. Trách nhiệm của người thầy và của hệ thống giáo dục là làm sao cho hai mục đích đó trùng với nhau, tức là cần tổ chức thi cử sao cho học sinh nào mở mang hiểu biết và rèn luyện các kỹ năng được nhiều nhất cũng là học sinh đạt kết quả tốt nhất trong thi cử.

Nếu “thi lệch” thì học sinh sẽ học lệch. Ví dụ như thi tốt nghiệp phổ thông, nếu chỉ thi có 3-4 môn thì học sinh cũng sẽ chỉ học 3-4 môn mà bỏ bê các môn khác. Trong một môn thi, nếu chỉ hạn chế đề thi vào một phần kiến thức nào đó, thì học sinh sẽ chỉ tập trung học phần đó thôi, bỏ quên những phần khác. Nếu đề thi toàn bài mẹo mực, thì học sinh cũng học mẹo mực mà thiếu cơ bản. Nếu thi cử có thể gian lận, thì học hành cũng không thực chất. Nếu thi cử quá nhiều lần, thì học sinh sẽ rất mệt mỏi, suốt ngày phải ôn thi, không còn thì giờ cho những kiến thức mới và những thứ khác. Nếu thi theo kiểu bắt nhớ nhiều mà suy nghĩ ít, thì học sinh sẽ học thành những con vẹt, học thuộc lòng các thứ, mà không hiểu, không suy nghĩ. Mấy đề thi trắc nghiệm ở Việt Nam mấy năm gần đây đang có xu hướng nguy hiểm như vậy: đề thi dài, với nhiều câu hỏi tủn mủn, đòi hỏi học sinh phải nhớ mà điền câu trả lời, chứ không đòi hỏi phải đào sâu suy nghĩ gì hết. Thậm chí thi học sinh giỏi toán toàn quốc cũng có lần được thi theo kiểu bài tủn mủn như vậy, và kết quả là việc chọn lọc đội tuyển thi toán quốc tế năm đó bị sai lệch nhiều. Bản thân chuyện thi trắc nghiệm không phải là một chuyện tồi, thi trắc nghiệm có những công dụng của nó, ý tôi muốn nói ở đây là cách dùng nó trong thi cử ở Việt Nam chưa được tốt.

Thi cử có thể chia làm 2 loại chính: loại *kiểm tra* (ví dụ như kiểm tra xem có đủ trình độ để đáng được lên lớp hay được cấp bằng không), và loại *thi đấu* (tuyển chọn, khi mà số suất hay số giải thưởng có hạn). Loại thi đấu thì cần thang điểm chi tiết (ví dụ như khi hai người có điểm xấp xỉ nhau mà chỉ có 1 suất thì vẫn phải loại 1 người, và khi đó thì chênh nhau  $\frac{1}{4}$  điểm cũng quan trọng), nhưng đối với loại kiểm tra, không cần chấm điểm quá chi li: những thang điểm quá nhiều bậc điểm (ví dụ như thang điểm 20, tính từng  $\frac{1}{2}$  điểm một, tổng cộng thành 41 bậc điểm) là không cần thiết, mà chỉ cần như các nước Nga, Đức hay Mỹ (chỉ có 4-5 bậc điểm) làm là đủ. Kinh nghiệm chấm thi sinh viên của tôi cho thấy chấm chi li từng điểm nhỏ một chỉ mất thời giờ mà không thay đổi bản chất của điểm kiểm tra: sinh viên nào kém, sinh viên nào giỏi chỉ cần nhìn qua tổng thể bài kiểm tra là biết ngay.

Kiểm tra nói là một hình thức kiểm tra khá tốt: trong vòng 10-15 phút hỏi thi cộng với một vài bài tập làm tại chỗ là giảng viên có thể “ước lượng” được mức hiểu kiến thức của sinh viên khá chính xác. Tuy nhiên, kiểu thi nói còn rất hiếm ở Việt Nam, và ngay ở Pháp cũng không phổ biến lắm. Có nhiều người lo ngại rằng thi nói sẽ khó khách quan. Điều này có lẽ đúng trong điều kiện Việt Nam hiện nay, khi có nhiều giảng viên thiếu nghiêm túc trong thi cử. Điểm kiểm tra để “tính sổ” ở Việt Nam trong điều kiện như vậy thì cần qua thi viết cho khách quan, đỡ bị gian lận. Nhưng không phải bài kiểm tra nào cũng cần “tính vào sổ”. Số lượng các kiểm tra “chính thức”, “tính sổ” nên ít thôi, ngoài ra thay bằng những kiểm tra “không chính thức”, không phải để tính điểm học sinh, mà để giúp học sinh hay phụ huynh học sinh biết xem trình độ đang ra sao, có những điểm yếu điểm mạnh gì. Hệ thống giáo dục phổ thông cấp 1 ở Pháp tính “điểm” như vậy: Điểm không phải là điểm “7” hay “10” mà là điểm “phần này đã nắm tốt”, “phần kia còn phải học thêm”.

Việc giao nhiều bài tập bắt buộc về nhà, rồi kiểm tra tính điểm các bài đó, nếu

không cẩn thận có thể biến thành “nhục hình” với học sinh. Nếu học sinh ngày nào cũng phải thức quá nửa đêm làm bài tập, không đủ thời gian để ngủ, thì điều đó sẽ làm ảnh hưởng xấu đến sự phát triển bình thường của học sinh. Chúng ta nên chú ý rằng giấc ngủ cũng là một phần quan trọng trong quá trình học: chính trong giấc ngủ, não được “làm vệ sinh”, thải bớt “rác” ra khỏi não để có chỗ cho hôm sau đón nhận thông tin mới, và sắp xếp lại các thông tin thu nhận trong ngày lại, liên kết với các thông tin khác đã có trong não, để nó trở thành “thông tin dài hạn”, “kiến thức”. Giai đoạn con người học nhanh nhất là khi còn ít tuổi, cũng là giai đoạn có nhu cầu ngủ nhiều nhất, còn càng lớn tuổi học cái mới càng ít đi và nhu cầu ngủ cũng ít đi. Trình độ học sinh, ít ra là trong môn toán, không thể hiện qua việc “đã làm bao nhiêu bài tập dạng đó” mà là “nếu gặp bài tập như vậy có làm được không”. Tất nhiên muốn hiểu biết thì phải luyện tập. Nhưng cứ làm thật nhiều bài tập giống nhau như một cái máy mà không suy nghĩ, thì phí thời gian. Thay vào đó chỉ cần làm ít bài hơn, nhưng làm bài nào hiểu bài đó. Theo tôi nói chung không nên tính điểm bắt buộc cho các bài tập về nhà, mà thay vào đó tính điểm thưởng thì tốt hơn. Một điều khá phổ biến và đáng lo ngại ở Việt Nam là học sinh được chính thầy cô giáo dạy cho sự làm ăn gian dối. Có khi giáo viên làm thẻ để “lấy thành tích” cho mình. Ví dụ như khi có đoàn kiểm tra đến dự lớp, thì dặn trước là cả lớp phải giơ tay xin phát biểu, cô sẽ chỉ gọi mấy bạn đã nhắm trước thôi. Hay là giao bài tập rất khó về nhà cho học sinh, mà biết chắc là học sinh không làm được nhưng bố mẹ học sinh sẽ làm hộ cho, để lấy thành tích dạy giỏi. Hoặc là mua bán điểm với học sinh: cứ nộp thầy 1 triệu thì lên 1 điểm chẳng hạn. Nhưng cũng có nhiều trường hợp mà giáo viên có ý định tốt, vô tư lợi, nhưng vì quan điểm là “làm như thế là để giúp học sinh” nên tìm cách cho học sinh “ăn gian” để được thêm điểm. Trong hầu hết các trường hợp, thì khuyến khích học sinh gian dối là làm hại học sinh. Như Mark Twain có nói: “It is better to deserve honors and not have them than to have them and not deserve them.” Có gần bao nhiêu thành tích rớt vào người, thì cũng không làm cho người trở nên giá trị hơn. Học sinh mà được dạy thói làm ăn gian dối từ bé, thì có nguy cơ trở thành những con người giả dối, mất giá trị. Tất nhiên, trong một xã hội mà cơ chế và luật lệ “ám ố”, và gian dối trở thành phong trào, ai mà không gian dối, không làm sai luật thì thiệt thòi không sống được, thì buộc người ta phải gian dối. Tôi không phê phán những hành động gian dối do “hành cảnh bắt buộc”. Nhưng chúng ta đừng lạm dụng “vũ khí” này, và hãy hướng cho chọ sinh của chúng ta đến một xã hội mới lành mạnh hơn, mà ở đó ít cần đến sự gian dối. Để đạt được vậy, tất nhiên các “luật chơi” phải được thay đổi sao cho hợp lý và minh bạch hơn. Tất nhiên, không chỉ ở Việt Nam, mà trên thế giới cũng có nhiều người hám “danh hã” và làm ăn giả dối, tuy tỷ lệ chắc là ít hơn nhiều. Tôi biết cả những giáo sư nước ngoài có trình độ cao, nhưng vì “quá hám danh” nên dẫn đến làm ăn giả dối. Sinh viên Pháp mà tôi dạy cũng có quay cốp. Bản thân tôi khi đi học cũng từng quay cốp. Tất nhiên tôi chẳng có gì để tự hào về chuyện đó, nhưng cũng không đến nỗi “quá xấu hổ” khi mà những người xung quanh tôi cũng quay cốp. Chúng ta là con người thì không hoàn thiện, nhưng hãy hướng tới hoàn thiện, giúp cho các thế hệ sau hoàn thiện hơn.

---

## Phần 7 :

(Một vài ý vắn tắt)

**Nên:** *Dạy học nghiêm túc, tôn trọng học sinh*

**Không nên:** *Dạy qua quýt, coi thường học sinh*

Điều trên gần như là hiển nhiên. Nhưng ngay trường tôi ở Pháp có những giáo sư dạy học qua quýt, nói lảm nhảm học sinh không hiểu, bị học sinh than phiền rất nhiều, ai mà dạy học cùng ê-kíp với họ thì khổ cực lây. Người nào mà không thích hoặc không hợp với dạy học, thì nên chuyển việc. Nhưng đã nhận việc có cả phần dạy học (như là công việc giáo sư bên Pháp, gồm cả nghiên cứu và giảng dạy) thì phải làm việc đó cho nghiêm túc. Dù có “tài giỏi” đến đâu, cũng không nên tự đề cao mình quá mà coi thường học sinh. Công việc đào tạo cũng quan trọng đối với xã hội không kém gì công việc nghiên cứu.

Có một số bạn trẻ, bản thân chưa có đóng góp gì quan trọng, nhưng đã vội chê bai những người thầy của mình, là những người có những hạn chế về trình độ và kết quả nghiên cứu (do điều kiện, hoàn cảnh) nhưng có nhiều cống hiến trong đào tạo, như thế không nên.

**Nên:** *Đối thoại với học sinh, khuyến khích học sinh đặt câu hỏi*

**Không nên:** *Tạo cho học sinh thói quen học thụ động kiểu thầy đọc trò chép*

Qua thảo luận, hỏi đáp mới biết học sinh cần những gì, vướng mắc những gì, bài giảng như thế đã ổn chưa, ... Khi học sinh đặt câu hỏi tức là có suy nghĩ và não đang ở trạng thái muốn “hút” thông tin. Học sinh nhiều khi muốn hỏi nhưng ngại, nếu được khuyến khích thì sẽ hỏi.

**Nên:** *Cho học sinh thấy rằng họ có thể thành công nếu có quyết tâm*

**Không nên:** *Nhạo bóng học sinh kém*

Tôi từng chứng kiến giáo sư sỉ nhục học sinh, ví dụ như viết lên bài thi của học sinh những câu kiểu “thứ mày đi học làm gì cho tốn tiền” hoặc “đây là phần tử nguy hiểm cho xã hội”. Như người ta thường nói “người phụ nữ được khen đẹp thì sẽ đẹp lên, bị chê xấu thì sẽ xấu đi”. Học sinh bị đối xử tồi tệ, coi như “đồ bỏ đi”, thì sẽ bị “blocked”: khi việc học trở thành “địa ngục” thì sẽ bị ức chế không học được nữa. Nhưng nếu được đối xử tử tế, cảm thấy được tôn trọng cảm thông, thì họ sẽ cố gắng, dễ thành công hơn. Nếu họ có “rót”, thì họ vẫn còn nhiều cơ hội khác để thành công, miễn sao giữ được niềm tin và ý chí. Học sinh học kém, nhiều khi không phải là do không muốn học hoặc không đủ thông minh để học, mà là do có những khó khăn nào đó, nếu được giải tỏa thì sẽ học được. Trẻ em sinh ra thiếu hiểu biết chứ không ngu ngốc. Nếu khi lớn lên trở thành người ngu ngốc, không biết suy nghĩ, thì là do hoàn cảnh môi trường và lỗi của hệ thống giáo dục. Người “thầy” thực sự phải giúp học sinh tìm lại được sự thông minh của mình, chứ không làm cho họ “đần độn” đi.

**Nên:** *Cho học sinh những lời khuyên chân thành nhất, hướng cho họ làm những cái mà giảng viên thấy sẽ có lợi nhất cho họ, đồng thời cho họ tự do lựa chọn những gì họ thích.*

**Không nên:** *Biến học sinh thành “tài sản” của mình, bắt họ phải làm theo cái mình thích.*

Các bậc cha mẹ cũng không nên bắt con cái phải đi theo những sở thích của cha mẹ, mà hãy để cho chúng lựa chọn cái chúng thích.

---

## Phần 8 :

**Nên:** *Hướng tới chất lượng*

**Không nên:** *Chạy theo số lượng và hình thức*

(Ở phần này tôi viết về triết lý giáo dục, hay mở rộng ra là các hoạt động nói chung, chứ không riêng cho giảng dạy toán)

Từ khi tôi là sinh viên, có được các anh chị học trên “truyền” cho điều này: Ai mà viết đến 10 bài báo khoa học, mà vẫn không được mấy người khác trích dẫn, thì coi như là thất bại trong khoa học. Điều “đáng sợ” không phải là không viết được bài báo khoa học để đăng, mà là viết nhiều bài “rởm rít”, tốn giấy mực. Tất nhiên, sinh viên khi mới tập nghiên cứu khoa học, thì khó có kết quả có giá trị lớn ngay, mà thường phải bắt đầu bằng một vài vấn đề nhỏ hơn, để làm quen. Nhưng nếu lúc nào cũng chỉ làm thứ dễ dàng và ít giá trị, không dám làm cái khó hơn, có giá trị lớn hơn, thì khó có thể thành công trong khoa học. Giá trị của các công trình khoa học (đăng trên các tạp chí quốc tế, chứ chưa nói đến tạp chí “vườn” của VN) có thể chênh nhau hàng trăm lần. Có viết hàng chục hay hàng trăm bài báo khoa học “làng nhàng” có khi vẫn không bằng là làm được một công trình “để đời”.

Không chỉ trong khoa học, mà trong hầu hết mọi lĩnh vực khác, chất lượng là cái đặc biệt quan trọng. Ví dụ như trong kinh tế, sự phát triển bền vững (sustainable development) chính là sự phát triển về chất. Chúng ta không thể tăng khối lượng của các sản phẩm hay dịch vụ lên “mỗi năm 5-7%” mãi được, vì tài nguyên thiên nhiên là hữu hạn, nhưng cái chúng ta có thể tăng lên, đó là chất lượng. Nếu chúng ta cứ phá rừng phá núi, hủy hoại môi trường để đạt con số % phát triển GDP, thì có nguy cơ biến đất nước thành bãi rác. Cái máy tính bỏ túi ngày nay “khỏe hơn” cả một “khối thép” máy tính nặng hàng chục tấn của thế kỷ trước, đó là phát triển về chất. Cùng là đồ ăn với lượng calor như nhau, nhưng chất lượng khác nhau thì giá trị có thể chênh nhau hàng chục lần. Ở VN, đồ ăn không đảm bảo vệ sinh và chứa nhiều chất độc nên giá trị thấp, tuy giá có thể rẻ nhưng tính tỷ lệ chất lượng chia cho giá có khi vẫn thấp. Trong văn học, thì một quyển truyện như “Hoàng Tử Nhỏ” (Le Petit Prince) đủ làm cho ông Saint-Exupery trở thành nhà văn của thế kỷ 20 được hàng trăm triệu người trên thế giới tìm đọc. Ở Việt Nam cũng có những tác phẩm văn học mà những thế kỷ sau người ta vẫn còn nhớ đến, trong khi có hàng nghìn, hàng vạn tác phẩm văn học khác nhanh chóng rơi vào lãng quên. Trong giáo dục, chất lượng cũng là cái cực kỳ quan trọng. Ảnh hưởng của một người thầy là rất lớn: trực tiếp đến hàng trăm, hàng nghìn học trò, và gián tiếp có thể đến hàng triệu người. Giá trị của giáo dục khó qui đổi thành tiền (một người vô văn hóa, thì có đắp thêm 1 triệu USD vào thì vẫn vô văn hóa). Chất lượng người thầy tốt lên thì làm cho chất lượng xã hội tốt lên, và cái sự thay đổi chất lượng đó không đo được bằng tiền. Nhưng có thể hình dung một cách thô thiển là, một người thầy tốt đem lại lợi ích cho học trò thêm hàng nghìn hay thậm chí hàng chục nghìn USD (thể hiện qua việc học trò có được việc tốt hơn, làm ra nhiều tiền của hơn ...) so với một người thầy không tốt bằng. Với hàng trăm hay hàng nghìn học trò “qua tay” trong cuộc đời, thì một người thầy tốt có thể đem lại lợi ích hàng trăm nghìn, hay thậm chí hàng triệu USD, nhiều hơn cho xã hội so với một người thầy kém hơn.

Muốn có chất lượng tốt, thì chất lượng phải được (xã hội) coi trọng đúng mức, và (người thầy) phải chú tâm tìm cách nâng cao chất lượng. Các giảng viên đại học ở các nước tiên tiến thường không phải dạy quá nhiều giờ (trung bình khoảng 6 tiếng một tuần), và cũng không phải lo “kiếm cơm thêm” ngoài công việc chính. Họ có thời giờ để tiếp cận thông tin khoa học mới, chuẩn bị bài giảng cho tử tế, suy nghĩ cải tiến cách dạy cho hay, ... (đấy là đối với những người có ý thức trong việc dạy học). Ở Việt Nam, các giáo viên và giảng viên dạy quá nhiều giờ, ngoài giờ chính thức đã nhiều còn dạy thêm tràn lan, có người “bán cháo phở” liên tục một ngày đến mười mấy tiết. Họ bù lại việc thù lao cho từng giờ dạy thấp, bằng việc dạy rất nhiều giờ. Nhưng trong điều kiện như vậy, thì họ sẽ dạy “như cái máy”, ít suy nghĩ, ít nhiệt tình với học sinh, ít

thời gian chuẩn bị, không có thời giờ cập nhật kiến thức, khó mà có chất lượng cao được.

Xu hướng của thời đại internet, là các giảng viên có chất lượng dạy học cao sẽ ngày càng trở nên có giá trị, trong khi những ai dạy dở sẽ ngày càng mất giá trị. Trong điều kiện “không có lựa chọn”, thì thầy dạy hay dạy dở thế nào học sinh “vẫn phải học thầy”, nhưng khi có lựa chọn, học sinh sẽ chọn học thầy hay, không đến học thầy dở. Việc điểm danh để bắt học sinh đi học, theo tôi là một hình thức giữ kỷ luật thô thiển kém hiệu quả. Thay vào điểm danh, nếu dạy hay, dạy cái có ý nghĩa, thì không bắt học sinh cũng tự động “tranh nhau” đi học. Tôi đã từng chứng kiến trường hợp có 2 giáo sư dạy cùng 1 môn ở 2 giảng đường khác nhau - ví số học sinh quá đông nên chia thành 2 giảng đường - nhưng một người dạy rất dở, và kết quả là học sinh ở giảng đường của người đó sau một thời gian chạy hết sang giảng đường bên kia. Internet sẽ tạo điều kiện cho học sinh tìm đến thầy hay dễ dàng hơn, qua các bài giảng video, các bài giảng online, ... Các giảng viên sẽ phải giảng ít giờ hơn trước, nhưng chuẩn bị cho mỗi bài giảng nhiều hơn, và mỗi bài giảng hay sẽ đến được với nhiều học sinh hơn qua internet.

Quay lại việc (hướng dẫn) nghiên cứu khoa học. Làm sao để cho NCS hướng tới làm nghiên cứu khoa học “chất lượng cao”? Một ông bạn tôi kể chuyện, NCS ở Đại học Berkeley toàn được các GS giới thiệu những vấn đề nghiên cứu, mà nếu giải quyết được thì có thể được giải Nobel hay giải Fields. Ở một nơi khác mà tôi khá quen biết là Đại học Utrecht, tuy có thể không bằng Berkeley, nhưng các luận án tiến sĩ ở đó mà tôi được biết thì luận án nào cũng xuất sắc, in thành sách, và có thể coi là tương đương với 1-2 bài báo dài 50 trang đăng trong một tạp chí khoa học “top 10”. Giá trị khoa học của một luận án như vậy có khi còn cao hơn tổng giá trị của mấy chục bài báo của cả đời một người làm khoa học “trung bình” ở Việt Nam. Bí quyết của họ để đạt được những kết quả có giá trị như vậy là gì? Đó là: nghiên cứu một vấn đề “thực sự” (có ý nghĩa khoa học lớn), được cấp học bổng tốt trong thời gian đủ dài (không vội vàng: có thể làm PhD trong vòng 5 năm hoặc thậm chí lâu hơn thay vì cứ “3 năm phải ra lò”), để yên tâm tập trung nghiên cứu vấn đề đó (và để học những kiến thức cần thiết phục vụ cho việc nghiên cứu), có thầy hướng dẫn giỏi và điều kiện làm việc tốt, và không bị sức ép của những thứ hình thức (như phải thi chính trị, phải đăng mấy bài báo, ...) hay sức ép về tài chính làm cản trở nghiên cứu. Ở Việt Nam bao giờ cũng phải tạo được những điều kiện như vậy, thì mới hy vọng có nhiều NCS “ra lò” trở thành nhà khoa học thực sự.

---

## Phần 9 :

**Nên:** *Làm sao cho học sinh hiểu được bản chất các kiến thức*

**Không nên:** *Lạm dụng ngôn ngữ hình thức, và dạy một cách giáo điều*

**Nên:** *Cho các bài tập nhằm giúp học sinh nắm được bản chất của các lý thuyết đang học hoặc/và luyện được các kỹ năng liên quan trực tiếp*

**Không nên:** *Cho nhiều bài “lạc đề”, ít liên quan trực tiếp đến lý thuyết đang học, đòi hỏi mẹo mực hoặc những lý thuyết chưa được học đến.*

Tôi sẽ lấy chương trình toán đại số lớp 7, và quyển sách “Các bài toán hay và khó / Đại số lớp 7” của hai tác giả Phan Văn Đức và Nguyễn Hoàng Khanh, xuất bản năm 2003, sau đây gọi tắt là sách BTĐS7, để làm ví dụ minh họa cho phần này. Tôi xin lỗi hai tác giả trên là đã mạo phép đem quyển sách BTĐS7 ra đây “mổ xẻ”. Tôi không có ý chê bai hay công kích gì ai - theo tôi hiểu thì quyển sách này cũng không kém gì các sách toán phổ thông khác đang được

dùng ở VN - mà do quyển sách này nó “có số” rơi vào tay tôi trung lúc tôi đang muốn bàn về phương pháp giảng dạy toán.

Thế nào là “giáo điều” ? Là dạy một cách áp đặt, đưa ra các thứ như là “chân lý duy nhất”, mà không giải thích vì sao nó như vậy, nó dựa trên cái gì, và không hề nói đến các khả năng khác, các “chân lý” khác. Sự nguy hiểm của lối dạy và học theo kiểu giáo điều, là biến học sinh thành những con người thụ động, mất khả năng suy nghĩ một cách độc lập, trở thành “cuồng tín” chấp nhận các thứ như là chân lý mà không đặt câu hỏi “tại sao”, và khi sai thì không biết đâu mà sửa vì “mất gốc”.

Một ví dụ đặc trưng của “văn hóa giáo điều” là môn “Tử vi đẩu số” ở Việt Nam. Các sách viết về tử vi mà tôi được nhìn thấy đều rất giáo điều, cái gì cũng do “Thánh bảo”, không có giải thích tại sao, và tất nhiên nếu xem bị sai thì chỉ còn cách “kêu trời”, không thể biết vì sao sai, sai ở đâu. Mà chắc chắn là dễ sai. Ví dụ, “giờ Tý” thực ra không bắt đầu lúc 11h đêm, mà cách đó khoảng 20 phút (tùy từng ngày), nhưng điều này chỉ có một nhóm nhỏ “thầy tử vi” biết còn có đọc sách cũng không học được. Nếu tìm hiểu kỹ hơn, thì sẽ thấy việc xác định “giờ” đó thực ra ứng với khái niệm Ascendant trong thiên văn học, và có thể tính chính xác “giờ Tý” đến từng giây một bằng các chương trình máy tính cho thiên văn. Hầu hết các “sao” trong tử vi đẩu số là “virtual stars” chứ không phải “sao thật” (nói về mặt toán học, nó có thể coi là một “spectral decomposition” tính ra từ vị trí của 3 điểm: mặt trăng, mặt trời và ascendant trên vòng hoàng đạo?). Cái “spectral decomposition” này trong tử vi đẩu số có lẽ là một phát minh rất lớn, nhưng rất tiếc là không có sách nào giải thích vì sao lại làm như vậy, và qui tắc xếp sao được đưa ra một cách hoàn toàn thần bí. Ở phương Tây cũng có “Tử vi”, gọi là astrology (chiêm tinh học). Tử vi đẩu số và astrology có cùng gốc thiên văn học, và có rất nhiều cái chung. Nhưng khác nhau ở chỗ astrology không giáo điều, mọi thứ có giải thích vì sao, tuy rằng các giải thích đó chưa “đạt mức khoa học”, nhưng cho phép người ta suy nghĩ, kiểm nghiệm, phát triển, sửa sai !

Trở lại toán đại số lớp 7. Tôi đọc quyển BTĐS7 thấy có một số điểm hình thức, giáo điều. Hai ví dụ:

- §11 Chương 1 (Số vô tỉ - Khái niệm về căn bậc hai, trang 22). Tóm tắt lý thuyết của phần này được viết như sau:

- Số vô tỉ là số được viết dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn Tập hợp các số vô tỉ được ký hiệu là  $I$
- Căn bậc hai của một số  $a$  không âm là số  $x$  sao cho  $x^2 = a$   
Số dương  $a$  có đúng 2 căn bậc hai: một số dương ký hiệu là  $\sqrt{a}$ ,  
một số âm ký hiệu là  $-\sqrt{a}$   
Số 0 chỉ có một căn bậc hai là số 0 viết là  $\sqrt{0} = 0$

Đâu là những thứ hình thức, giáo điều trong các câu trên ?

Tôi làm toán mấy chục năm nay, chưa bao giờ phải dùng đến ký hiệu “tập hợp các số vô tỉ”, và đến khi đọc sách này tôi mới biết “tập hợp các số vô tỉ được ký hiệu là  $I$ ” ! Đây là một “kiến thức” hình thức không dùng để làm gì cả. Và tại sao tôi lại phải ký hiệu nó là  $I$  ? Tôi muốn dùng ký hiệu khác thì sao ?

Câu “số vô tỉ là số được viết dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn” tuy đúng về mặt hình thức toán học, nhưng rất rắc rối khó hiểu. Bản chất của “vô tỉ” là “không hữu tỉ”, tức là các số thực không viết được dưới dạng phân số. Để hình dung các số vô tỉ, cần làm bài tập ví dụ như “số  $\sqrt{2}$  là số vô tỉ”. Hai khái niệm “số vô tỉ” và “căn bậc hai” là hai khái niệm quan trọng, cần có thời gian để hiểu từng khái niệm, không hiểu sao lại được dồn vào chung một mục, cứ như là căn bậc hai của một số thì là số vô tỉ !

Có ai nói “căn bậc hai của 4 là -2 không” ? Không ai nói thế cả, mà người ta chỉ nói “căn bậc hai của 4 là 2”. Tức là căn bậc hai của một số thực dương  $a$ , luôn được hiểu là số thực *dương* có bình phương bằng số kia, và ký hiệu là  $\sqrt{a}$ . Bản thân cái ký hiệu  $\sqrt{a}$  được đọc là “căn bậc hai của a” (“square root of a” tiếng Anh). Việc dạy cho học trò là “a có 2 căn bậc 2” tuy có thể đúng về hình thức, nhưng rắc rối, và thực ra chỉ “đúng nửa vời”. Nếu một số có 2 căn bậc hai, thì cũng phải có 3 căn bậc ba, nhưng giải thích với học sinh lớp 7 chuyện một số có 3 căn bậc 3 sao đây ? Nói là phương trình  $x^2 = a$  có hai nghiệm thực  $\sqrt{a}$  và  $-\sqrt{a}$  khi  $a$  là số dương thì đúng bản chất hơn.

Để hiểu được căn bậc hai, một cách tốt nhất là làm ví dụ, như là tính  $\sqrt{3}$  chính xác đến 3-4 chữ số (mà không dùng máy tính). Tôi có thí nghiệm dạy cho con tôi (lúc quãng 9-10 tuổi) tính  $\sqrt{2}$ , rồi sau đó nó tự tính  $\sqrt{5}$ , mất khá nhiều thời gian và viết mất mấy trang giấy, nhưng nó tính được, và qua đó không những hiểu được thế nào là căn bậc hai, mà còn hiểu được phương pháp tính gần đúng nó như thế nào, qua ví dụ cụ thể. Trong sách BTĐS7 có những bài tập có thể coi là rất khó (vượt xa mức chương trình ?) trong đó có căn bậc hai

(ví dụ bài 95b: chứng minh rằng  $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \{\dots\} + 1/\sqrt{100} > 10$ ),

mà lại thiếu những bài “đơn giản” nhưng giúp hiểu bản chất của căn bậc hai, như bài “tính  $\sqrt{3}$  chính xác đến 3 chữ số sau dấu phẩy” như tôi viết phía trên.

- §3 Chương 3 (phần Biểu Đồ, chương Thống Kê, trang 114 của sách BTĐS) có viết :

Ngoài bảng số liệu thống kê ban đầu, bảng “tần số”, người ta còn dùng biểu đồ để cho một hình ảnh cụ thể về giá trị của dấu hiệu và tần số.

Có các loại biểu đồ như sau: biểu đồ đoạn thẳng, biểu đồ hình chữ nhật, biểu đồ hình quạt.

Vì sao những câu trên là giáo điều ? Vì nó ép đặt (chỉ có 3 loại biểu đồ, và nói là biểu đồ “cho một hình ảnh cụ thể”). Ý nghĩa của biểu đồ được giải thích không chính xác (thế nào là “hình ảnh cụ thể” ? Thực ra biểu đồ hoàn toàn có thể “kém cụ thể, kém chính xác” hơn là các số, nhưng nó cho một bức tranh trực giác, giúp cho người đọc nắm được thông tin quan trọng một cách nhanh chóng bằng hình ảnh). Ý nghĩa của biểu đồ nằm ở chỗ nó cho phép người đọc dùng bộ phận “xử lý hình ảnh” của não để nạp và xử lý thông tin - bộ phận đó của não người “chạy” nhanh hơn nhiều so với bộ phận “xử lý số”, và như vậy các thông tin ở dạng biểu đồ có thể được đọc nhanh hơn nhiều lần là ở dạng số (tuy rằng với độ chính xác có thể thấp hơn). Và tại sao lại chỉ có 3 dạng biểu đồ ? Điều này hoàn toàn sai thực tế ! Các dạng biểu đồ là do con người nghĩ ra, và người ta có thể nghĩ ra một tỷ dạng khác nhau. Tuy rằng 3 dạng trên có thể là 3 dạng hay gặp nhất (một phần lý do là do nó đơn giản, dễ vẽ), nhưng không phải là không có các dạng khác, cũng khá phổ biến trong những tình huống nào đó. Ví dụ như biểu đồ dùng màu (màu xanh chỉ đi lên, màu đỏ chỉ đi xuống, xanh đậm là lên cao ..., không cần nhìn số mà chỉ cần nhìn bằng các màu sắc là hình dung được sự thay đổi) khá thuận tiện cho việc xem sự thay đổi của giá cả trên thị trường chứng khoán. Hay biểu đồ dùng bản đồ thế giới (ở trên mỗi nước có một khoanh tròn hay khoanh vuông nào đó, to nhỏ phụ thuộc vào số lượng một cái gì đó ở nước đó to hay nhỏ) là những biểu đồ địa lý rất hữu ích, v.v. Những biểu đồ như vậy là những biểu đồ thống kê gặp trong thực tế, chứ không phải chỉ có 3 loại biểu đồ như trong “sách bảo”.

Nhân tiện nói thêm: tất nhiên, lý thuyết thống kê dạy cho học sinh lớp 7 khá

sơ sài. Tôi không rõ mục đích dạy thống kê ở lớp 7 để làm gì, trong khi chưa đủ cơ sở toán để học nhập môn “thống kê toán học” theo đúng nghĩa, chứ không dùng lại ở chỗ “đếm xem giá trị x xuất hiện mấy lần trong một bảng” (là thứ “trivial” không cần phải dạy, bất cứ ai khi gặp câu hỏi như vậy và hiểu câu hỏi trong tình huống cụ thể đều đếm được dễ dàng). Ngay 1 khái niệm rất dễ hiểu và rất cơ bản của thống kê là “median value” (giá trị giữa ? - ví dụ như khi nói đến mức lương tiêu biểu của một nghề nào đó người ta thường dùng mức median chứ không phải average) cũng không thấy có trong sách lớp 7. Dạy “tủn mủn” có một tẹo về thống kê, không thành một thứ “coherent”, không hiểu ý nghĩa và công dụng, thì khó “động” được.

Nói thêm về bài tập. Thế nào là một bài tập hay ? Theo tôi một bài tập hay là một bài tập “đặt đúng chỗ, đúng mục đích”, giúp học sinh nắm được phần lý thuyết đang cần nắm hoặc là rèn được kỹ năng đang cần rèn, hoặc là (trong trường hợp kiểm tra thi cử) kiểm tra được đúng những kiến thức và kỹ năng cần kiểm tra. Cùng là một bài tập, nhưng có thể hay trong tình huống này, lại trở thành không hay trong tình huống khác, nếu bị “đặt nhầm chỗ”. Trong quyển sách BTĐS7, gọi là “Những bài toán khó và hay”, tôi thấy có những bài tuy khó thì có thể khó thật, nhưng “hay” thì tôi “không thấy hay”, bởi vì dường như chúng bị “đặt nhầm chỗ”. Chúng giống như những bài toán đánh đố, mẹo mực, hơn là những bài toán liên quan trực tiếp đến phần kiến thức kỹ thuật trong chương trình mà học sinh cần nắm vững.

Ví dụ: Chương 1, về “số hữu tỷ và số vô tỷ”. Theo tôi hiểu, mục đích của chương này là cho học sinh biết làm các phép tính với các số hữu tỷ (tức là các phân số), và hiểu được rằng có những số vô tỷ, đồng thời biết được khái niệm thế nào là căn bậc hai của một số. Chương này *không nhằm* dạy về vấn đề vấn đề chia hết trong số học, hay về tính toán các biểu thức đại số phức tạp. Thế nhưng trong Chương 1 có bài tập sau: Chứng minh rằng  $A = 75 \cdot (4^{1999} + 4^{1998} + \dots + 4 + 1) + 25$  chia hết cho 100. Để làm được bài này, học sinh cần biết cách cộng  $4^{1999} + 4^{1998} + \dots + 4 + 1$  (là một bài toán có thể coi là khó đối với học sinh lớp 7 ?, tuy nhiên nó không phải là mục đích kiến thức của chương), rồi sau đó kiểm tra sự chia hết cho 100, cũng không phải là cái nằm trong kiến thức mà Chương 1 này muốn học sinh nắm được. Một bài toán như vậy, dù dễ hay khó, cũng không hay, vì “nhầm chỗ”.

Ví dụ khác: trong Chương 1 có những bài tập về bất đẳng thức (như bài 95) hay cực trị (như bài 125) là những bài khó. Nó khó vì học sinh không được học tý gì về lý thuyết (phương pháp đánh giá các đại lượng hay tìm cực trị) mà phải làm bài tập. Nếu làm bài tập, mà không có phương pháp làm, tức là “đoán mò”, có nghĩa là sẽ làm một cách mẹo mực. Nó có thể coi là bài hay, nếu xếp vào dạng “toán đố nhằm rèn luyện tư duy, khả năng suy luận sâu cho học sinh giỏi” (tức là cho một tỷ lệ nhỏ học sinh có óc tò mò đặc biệt về toán), nhưng nó không “hay” nếu đây là bài tập để học về “số hữu tỷ và vô tỷ”. Một học sinh “bình thường”, nếu gặp những bài như vậy khó có thể làm được (họ nghĩ một lúc không ra sẽ thấy chán và tự hỏi “tại sao phải làm bài như vậy”), dù đã tính toán thành thạo với các phân số và biết tính căn bậc hai. Nhưng nếu được học về các phương pháp tìm cực trị hay đánh giá các đại lượng rồi, thì mấy bài toán đó không còn gì “khó”, có điều mấy phương pháp đó lại không có trong chương trình chính thức ! Tôi e rằng kiểu “đánh đố” như vậy sẽ làm cho nhiều học sinh lầm tưởng rằng họ dốt, không học được toán, trong khi thực ra họ có thể học, hiểu và dùng được các công cụ toán rất hiệu quả, nếu được dạy “bài bản” hơn. Không hiểu kiểu “toán đố” này có phải một trong những nguyên nhân khiến học sinh phải đi học thêm tràn lan đến tối mịt không ? (Nếu không học thêm thì “làm sao mà giải được bài tập” !).



---

## Phần 10 :

**Nên:** Hòa hòa giữa các thái cực trong giáo dục

**Không nên:** Thái quá

Trên thế giới có rất nhiều thái cực (hay còn gọi là “âm dương”, “lưỡng nguyên”), ví dụ như nam-nữ, đêm-ngày, vua-tôi, chung-riêng, tư bản-xã hội, v.v. Sự phát triển của thế giới dựa trên sự kết hợp hài hòa, “chung sống hòa bình” của các thái cực, chứ nếu cực nào “thái quá”, lấn át quá mức đối cực, thì có thể dẫn đến khủng hoảng. Ví dụ như tư bản hoang dã (thiếu yếu tố xã hội) thì dẫn đến cách mạng vô sản. Nhưng ngược lại, cộng sản như Liên Xô (thiếu yếu tố tư bản) cũng không thọ được lâu. Trong việc dạy và học cũng có những thái cực. Ở phần này tôi muốn nói đến (một cách không đầy đủ) một vài thái cực đó.

**Bắt chước-sáng tạo.**

Quá trình học tự nhiên một kiến thức hay kỹ năng nào đó gồm cả hai phần bắt chước và sáng tạo. Ví dụ như một đứa trẻ nhỏ học nói: nó bắt chước nói lại những từ ngữ nó hay nghe được (và bắt chước luôn cả giọng nói, ngữ điệu, v.v.), rồi đến nói các câu mà nó sáng tạo được từ các từ ngữ câu cú mà nó đã biết, nhằm mục đích gì đó. Sáng tạo có thể sai (trẻ con nói nhiều câu ngây ngô, hay các lý thuyết vật lý mới có nhiều lý thuyết có thể cũng rất ngây ngô), nhưng muốn sáng tạo được thì phải không sợ sai, sợ “khác người”, không bị hoặc không sợ người khác chê cười hoặc phạt khi sai, khi “khác người”. Và tất nhiên cũng phải có kiến thức đã hấp thụ (phần lớn qua bắt chước) để lấy đó làm cơ sở sáng tạo. Lối giáo dục “cổ hủ” (khá phổ biến ở VN) là chỉ dạy bắt chước chứ ít phát huy sáng tạo của học sinh, hay tệ hơn là “trù dập sáng tạo”. Ví dụ như bình luận về lịch sử, học sinh có khi không được bình luận theo suy nghĩ và câu chữ riêng của mình, mà cứ phải học vẹt đoạn bình luận mà cô giáo đã cho sẵn thì mới được cô cho điểm tốt.

Ở Pháp, có thời người ta lại thái quá theo hướng ngược lại: tức là quá chú trọng chuyện sáng tạo mà quên rằng bắt chước cũng là khâu quan trọng trong việc học (và trong cả các thứ khác: Nhật Bản trước khi cạnh tranh thắng Mỹ về xe hơi, thì cũng phải bắt chước làm xe hơi giống các nước Âu-Mỹ đã chứ không sáng tạo ngay lập tức được; hay như Trung Quốc đang làm nhái nhiều đồ điện tử nhưng có thể 10-15 năm nữa họ sẽ thành trùm thế giới về design đồ điện tử). Thậm chí người ta không muốn dạy học sinh định lý toán mà muốn học sinh sáng tạo ra chúng. Nếu lúc nào cũng đòi “sáng tạo” mà không chịu “bắt chước”, thì sẽ học được rất ít cái mới (mới ở đây là mới đối với người học, chứ không phải là chưa ai biết), và không cẩn thận sẽ thành “ếch ngồi đáy giếng”.

Ở Nga có truyện tiểu lâm về một anh chàng “nhà quê ra tỉnh” tự nhận mình là nhà văn. Mọi người hỏi anh ta thấy truyện của Tolstoi thế nào, anh ta bảo chưa đọc bao giờ, hỏi về Pushkin cũng chưa đọc bao giờ, ... hỏi về nhà văn nổi tiếng nào cũng không đọc. Khi hỏi anh ta làm thế nào, thì anh ta trả lời là anh ta “chỉ viết chứ không đọc”. Ở VN cũng có người bị “bệnh” ếch ngồi đáy giếng lầm tưởng mình là “nhà toán học và giáo dục lớn của thế giới”, “một trong mấy trăm bộ óc vĩ đại của nhân loại”.

**Lý thuyết-thực hành**

Trong cả hai trường hợp: học nhiều lý thuyết “suông” mà không làm bài tập thực hành, hoặc là chỉ làm nhiều bài tập mà được học rất ít lý thuyết, học sinh

đều sẽ chỉ nắm được ít kiến thức: học sinh khó mà “tự nghĩ ra” lý thuyết dù có làm bao nhiêu bài tập, và học lý thuyết mà không có bài tập đi kèm thì cũng khó mà hiểu bản chất và biết cách sử dụng. Cả hai sự thái quá này đều xảy ra trong thực tế. Chẳng hạn có những môn toán ở đại học dạy toàn khái niệm và định lý trừu tượng mà thiếu ví dụ & bài tập cụ thể, và ngược lại có những môn toán ở bậc phổ thông mà học sinh phải làm quá nhiều bài tập vượt ra ngoài phạm vi của lý thuyết trong chương trình.

Kỷ luật-tự do.

Kỷ luật quá thì nghẹt thở, tự do quá thì loạn. Trong giáo dục, lối cổ truyền nhiều khi quá khắt khe, cha mẹ thầy cô sẵn sàng đánh trẻ em hoặc dùng hững hình phạt nhục hình khác. Lối giáo dục như vậy có xu hướng biến con người thành “nô lệ” chỉ biết phục tùng. Nhưng trong thời đại mới lại có sự thái quá theo hướng ngược lại: cha mẹ thầy cô có khi bất lực vì không dám nghiêm khắc với trẻ em, không biết làm sao để giữ kỷ luật.

Có giảng viên rất “khó tính”. Sinh viên lặn lội đi học từ xa mấy chục km đến muộn 5 phút cũng bị đuổi không được cho vào lớp, nhưng là “khó tính” với sinh viên trong khi lại “dễ tính” với bản thân, tự mình có những khi đi muộn hay không chuẩn bài giảng tử tế. “Kỷ luật” kiểu như vậy không làm cho sinh viên phục, mà chỉ làm cho họ thấy bất công. Có giảng viên thì lại “giảng bài” kiểu hì hụi chép các thứ lên bảng trong khi sinh viên ở dưới làm việc riêng, nói chuyện riêng ào ào. Làm như vậy thì cũng không được sinh viên tôn trọng. Và không giữ được kỷ luật trong lớp thì chất lượng dạy cũng khó mà tốt được, khi mà sinh viên nào muốn học cũng khó học nổi trong một lớp ồn ào hỗn loạn.

Trừu tượng-cụ thể, hình thức-không hình thức (bổ sung, 25/07/2009)

Công dụng của toán học nằm ở chỗ nó có thể dùng để giải quyết các vấn đề nảy sinh trong “thực tế” (khoa học, công nghệ, kinh tế, xã hội, ...). Để giải quyết các vấn đề bằng toán học, cần làm các bước như sau:

- Mô hình hóa (trừu tượng hóa): chuyển một vấn đề “thực tế”, “cụ thể”, thành một vấn đề “toán học”, “trừu tượng”

- Giải bài toán trừu tượng đã được lập ra, bằng các công cụ toán học

- Diễn giải (cụ thể hóa) nghiệm trừu tượng nhận được ở bước phía trên, thành lời giải cụ thể cho vấn đề “thực tế” ban đầu

Sức mạnh của toán học chính là nằm ở chỗ trừu tượng của nó. Ngôn ngữ trừu tượng toán học và quá trình mô hình hóa cho phép “biến những thứ khác nhau thành giống nhau” (“give the same name to different things”, nói theo lời của Henri Poincaré), để mà có thể dùng những công cụ toán học chung giải quyết rất nhiều bài toán thực tế đa dạng khác nhau. Các nhà toán học (đặc biệt là toán lý thuyết) chỉ làm việc trên các đối tượng toán học trừu tượng, nhưng tất nhiên nếu không thể “cụ thể hóa”, chuyển đổi ngược lại những thông tin, lời giải toán trừu tượng thành những lời giải thực tế cho các vấn đề thực tế, thì toán học cũng sẽ vô dụng.

Có một câu chuyện thú vị về một nhà toán học Nga Xô Viết, khi được mấy kỹ sư quân sự đem đến một hệ phương trình hỏi phải thay đổi tham số thế nào cho nghiệm tốt hơn (vì là bí mật quân sự, họ không được phép nói các phương trình đó từ đâu ra), nhà toán học này nhìn vào và nói “các anh phải làm cánh máy bay dài ra!” Tức là người ta có thể nhìn các thứ “trừu tượng, hình thức” mà biết ý nghĩa “thực tế” của chúng thế nào, nếu đạt đến trình độ nào đó.

Học sinh mà học toàn cái cụ thể, không có trừu tượng, thì không phải là “học toán”, sẽ không nắm bắt được các công cụ toán học trừu tượng có sức mạnh giải quyết nhiều vấn đề. Nhưng ngược lại nếu học toàn trừu tượng, không có ví dụ ứng dụng cụ thể, thì là học “trên mây trên gió”, tuy có học công cụ toán nhưng không dùng được chúng và không biết chúng dùng làm gì.

Để học các khái niệm toán trừu tượng tất nhiên cần ngôn ngữ hình thức. Nhưng chỉ cần ở mức độ vừa phải. Nếu “quá sính” ngôn ngữ hình thức, thì sẽ như là đem dao mổ bò đi cắt bánh mì, không cần thiết mà chỉ làm cho mọi thứ trở nên thêm rắc rối khó hiểu. Nói theo như Einstein là “Everything should be made as simple as possible, but not simpler”.

Có một đạo (quãng những năm 1970s, 1980s) ở phương Tây (cũng như ở Nga) người ta quá sính đưa ngôn ngữ hình thức nặng nề vào sách toán phổ thông. Hệ quả là học sinh được học toán một cách quá hình thức rắc rối, toàn thứ trừu tượng trong khi không biết giải những bài toán ví dụ cụ thể. Cuộc cải cách toán ở Mỹ từ cuối những năm 1980 (gọi là “the new new math”) để nhằm chống “chủ nghĩa hình thức trong dạy toán”) thì lại rơi vào thái cực ngược lại: khi người ta cố gạt bỏ mọi thứ hình thức, trừu tượng, thì người ta cũng gạt luôn nội dung toán học ra khỏi môn toán, và học sinh học hết phổ thông cũng không còn biết gì về toán nữa. Đến nay người ta lại cải cách lại cho “cân bằng hơn”.

Nói mở rộng ra, không chỉ trong toán, mà trong cuộc sống nói chung, hình thức là cái có vai trò khá quan trọng (tuy nhiên cần phân biệt giữa 2 loại hình thức: “hình thức bề ngoài”, và “ngôn ngữ hình thức”). Có chuyện một siêu thị bán hai loại nho 1 loại có bọc ni lông đẹp đẽ, giá đắt, còn một loại để trong rổ bán giá rẻ. Thực ra hai loại nho đó là một, chỉ khác nhau ở cách “trình bày”, nhưng dân tình lại cứ thích mua loại đắt tiền mà trông hấp dẫn là loại rẻ tiền mà cùng chất lượng nhưng trông “không sang”. Trong toán học cũng vậy, cùng là một lời giải hay kết quả toán học, nếu được trình bày một cách sáng sủa, cẩn thận, thì người ta sẽ thấy hay hơn là nếu trình bày một cách cẩu thả, u tối. Các thứ hình thức, nghi lễ được đặt ra là có lý do của nó. Hãy tưởng tượng một nguyên thủ quốc gia mà lại ăn mặc lôi thôi và “tỏa mùi” trong một hội nghị quốc tế thì sẽ làm mất thể diện của nước đó thế nào. Nhưng hình thức cần đi đôi với nội dung. “Chủ nghĩa hình thức” là khi “rỗng ruột”, chỉ có hình thức mà không có nội dung tương xứng, như kiểu “tiến sĩ giấy”. Khi giáo viên cho điểm 9,10 cả những học sinh không biết gì cần học lại, hay là khi bảo cả lớp phải giơ tay xin phát biểu kể cả khi không có gì để phát biểu, đây là chạy theo chủ nghĩa hình thức, giả dối.

Nhân nói về chuyện “đặt tên giống nhau cho các thứ khác nhau” (tức là thấy được sự giống nhau giữa các thứ khác nhau) có một bài toán đồ thú vị sau đây: Giả sử có 1 cái que nằm ngang, mà một con kiến đi từ đầu que đến cuối que hết 2 phút, và nếu đi đến cuối que thì rơi ra khỏi que. Bây giờ giả sử có 20 con kiến ở trên que (ở các vị trí khác nhau), đi theo các hướng khác nhau (về phía 2 đầu khác nhau). Que hẹp, nên là khi hai con kiến đi ngược hướng đến cùng 1 điểm thì đụng đầu, quay ngược đầu lại và đi tiếp. (Vận tốc của các con kiến được giả sử là bằng nhau, và không đổi). Thử hỏi cần (ít nhất) bao nhiêu thời gian để (chắc chắn rằng) tất cả 20 con kiến sẽ rơi ra khỏi que ?

Tôi có đem nó đố 1 lớp SV toán năm thứ nhất thuộc chương trình tiên tiến của ĐHQG trong một buổi nói chuyện. Sau 1 lúc có 1 bạn gái giải đúng (còn các bạn khác mới đưa ra các giả thuyết). Về sau anh Lê Minh Hà (phụ trách chương trình tiên tiến đó) có nói lại với tôi rằng bạn gái đó là một bạn từng tham gia thi IMO được huy chương vàng (nếu tôi nhớ không nhầm). Bài toán đố này có trong 1 quyển sách; lời giải tôi sẽ không ghi ra ở đây, để người đọc tự giải.

**Nên:** Tìm cách kích thích sự tò mò của học sinh, và làm cho học sinh cảm thấy học là “được học, là sướng”

**Không nên:** Dạy theo kiểu “nhồi vẹt”, làm cho học sinh cảm thấy học là “phải học, là khổ”.

Ông Albert Einstein, người được hậu thế bầu là con người vĩ đại nhất của thế kỷ XX, có nhiều câu nói rất hay. Trong đó có câu “I have no special talent. I am only passionately curious”. Ý là bí quyết thành công của ông ta chính là sự “tò mò một cách đam mê”. Và Einstein cũng có nói một cách mỉa mai: “It is a miracle that curiosity survives formal education” (“thật kỳ diệu là giáo dục hình thức chưa bóp chết sự tò mò”), và kể về sự khổ sở của ông ta khi đi học như sau: “One had to cram all this stuff into one’s mind for the examinations, whether one liked it or not. This coercion had such a deterring effect on me that, after I had passed the final examination, I found the consideration of any scientific problems distasteful to me for an entire year.” (Tạm lược dịch: “Tôi bị nhồi học như nhồi vẹt đủ thứ để trả thi dù có thích chúng hay không; sự ép buộc này khiến tôi ngán khoa học đến tận cổ trong suốt một năm sau kỳ thi đó”).

Sự tò mò thúc đẩy con người ta tìm tòi hiểu biết, làm cho não tiếp thu kiến thức và khám phá thế giới nhanh hơn. Khi tò mò tức là trong đầu đặt ra các câu hỏi, và não “thèm khát” thông tin trả lời các câu hỏi đó, khi “vớ được” câu trả lời sẽ nhập vào đầu rất nhanh vì trong đầu đã “dọn chỗ” sẵn để đón nhận nó. Trẻ con sinh ra có bản năng tò mò, và học rất nhanh. Vấn đề là làm sao giữ được tính tò mò đó mà không đánh mất nó đi khi lớn lên. Theo một số nghiên cứu về giáo dục học – thần kinh học (xem cuốn sách “Insult to Intelligence” của Frank Smith), thì trẻ em trung bình mỗi ngày học được một cách tự nhiên, nhẹ nhàng mấy chục từ mới trong lúc làm các việc khác, tuy rằng lúc học ở trường thì có khi vất vả một ngày không học nổi vài từ mới. Một trong các lý do mà các nhà giáo dục học đưa ra để giải thích sự học kém hiệu quả ở trường, chính là cách giáo dục hình thức ở trường làm giảm đi sự tò mò của trẻ em. Khi chán học, không có sự tò mò, thì học rất khó vào.

Theo những nghiên cứu về thần kinh học trong giáo dục, thì con người ta khi học, không những chỉ nhớ “kiến thức” được học, mà còn nhớ cả trạng thái tâm lý, cảm giác (feelings) khi học “kiến thức” đó. Nếu như nhớ rằng học cái gì đó là “nhàm chán” hay “đau khổ”, thì sẽ không muốn học nữa, vì phản xạ tự nhiên của con người là không muốn có cảm giác nhàm chán hay đau khổ. Ngược lại, nếu nhớ rằng học cái gì đó là “vui” là “sướng”, thì muốn được lặp lại cái cảm giác đó, tức là muốn được học tiếp. Khi trẻ em chơi một cái gì đó mà nó thích, thì nó tập trung cao độ. Nếu làm sao để “trò học” cũng hấp dẫn như “trò chơi”, thì học sẽ rất hiệu quả. Tôi có đọc đâu đó một lần, là có một lớp học sinh ở Nga, khi được hỏi thích học môn gì nhất, thì nói rất thích môn sử, vì học môn đó được đi thăm quan bảo tàng, khám phá nhiều thứ thú vị. Đi học mà sướng như đi chơi, có khi còn sướng hơn đi chơi.

Leonardo da Vinci có từng nói: “Giống như việc bị bắt ép ăn khi không muốn ăn có thể làm hại sức khỏe, việc bị bắt ép học cái không muốn học cũng có thể làm tổn thương trí nhớ, và không tiếp thu được gì”. [Tôi đang tìm câu gốc bằng tiếng Ý nhưng chưa tìm được, nên tạm dịch ra từ câu tiếng Anh]. Một trong những cách nhanh nhất để “tiêu diệt” sự tò mò, làm cho học sinh chán học, là dạy học kiểu “nhồi vẹt” (nhồi nhét một đống thông tin vào đầu học sinh, không kịp tiêu hóa, không biết để làm gì, đến mức học sinh bị “bội thực”, sợ học). Ở VN, từ rất nhiều năm nay, tôi thấy hầu như ai cũng kêu là trẻ con bị học quá

tài, nhưng hiểu biết thì không hơn gì trẻ em ở các nơi khác học “vui vẻ nhẹ nhàng” hơn. Đây có lẽ là một lỗi lớn của hệ thống giáo dục. Các bậc phụ huynh không nên bắt con mình học đi thêm liên miên đến mức nó phát ngán, phát sợ học. Còn nếu nó thích học cái gì (đặc biệt là những cái không được dạy ở trường, ví dụ như học nạn tượng, học đánh đàn piano, học chế tạo robot, v.v.), thì cứ cho nó đi học thêm nếu nhà có điều kiện.

Làm sao để kích thích sự tò mò của học sinh (và của người lớn) ? Đây có lẽ là cả một môn khoa học và nghệ thuật lớn. Không chỉ giáo dục cần đến kích thích tò mò, mà nhiều lĩnh vực khác cũng cần, và có khi cần một cách hiển nhiên hơn, ví dụ như nghề quảng cáo. Những ai làm quảng cáo ắt hẳn phải rất quan tâm đến chuyện kích thích tò mò, vì nếu không kích thích được sự tò mò của người xem thì sẽ bị ảnh hưởng xấu ngay đến cái túi tiền. Những người làm về giáo dục có lẽ có thể học và chia sẻ phương pháp kích thích tò mò với những ngành khác.

Bản thân tôi không phải là “chuyên gia” trong lĩnh vực gây tò mò. Tôi chỉ có thể kể ở đây một vài kinh nghiệm cá nhân nhỏ. Có lần tôi đố con tôi (tôi có hai con đang học phổ thông) chứng minh rằng tổng của chuỗi  $\sum 1/n^2$  bằng  $\pi^2/6$ . Tất nhiên bài toán này là quá khó đối với tụi nó. Tuy tụi nó có thể hiểu (một cách trực giác) rằng chuỗi  $\sum 1/n^2$  là chuỗi hội tụ, và cậu lớn tính được giá trị gần đúng của chuỗi đó và thấy nó giống giá trị gần đúng của  $\pi^2/6$ , nhưng để chứng minh đẳng thức chính xác, thì chưa thể làm nổi. Cái đẳng thức này tất nhiên chỉ là một trong số vô vàn những “sự trùng hợp của tự nhiên”, và chẳng có công dụng gì trong đời sống thực tế, thế nhưng trông nó “thú vị, kỳ bí”. Tụi trẻ tò mò, muốn hiểu được đẳng thức này, bắt tôi giải thích. Tôi nói “muốn chứng minh được, phải biết giải tích”, thì tụi nó bắt tôi giải thích các khái niệm đạo hàm, tích phân, v.v. Qua đó tụi nó học một số kiến thức toán hiện đại, “chỉ vì” tò mò. Cái bài toán đố đó nó như là một thứ “củ cà rốt treo trước mặt con lừa, khiến cho con lừa chịu khó đi với hi vọng ăn được củ cà rốt”. Định lý lớn Fermat cũng vậy. Nó không hề có một “công dụng thực tế” gì hết, nhưng nó gây tò mò cho các nhà toán học (và cho cả những người không phải nhà toán học chuyên nghiệp). Việc đi tìm lời giải cho nó đã làm nảy sinh ra những lý thuyết toán hiện đại có công dụng thực tế rất lớn (ví dụ trong mật mã, an toàn thông tin).

Bài toán tôi viết phía trên, gây tò mò lớn cho mấy đứa con tôi, những hoàn toàn có thể không gây tò mò cho con hàng xóm. Cùng một thứ, có thể gây tò mò cho người này, mà không gây tò mò cho người khác. Bởi vậy đối với những trẻ khác nhau, cần tìm các cách khác nhau (thích hợp với tính cách, tâm lý, hiểu biết của chúng) để gây tò mò cho chúng. Nếu thấy thứ này không gây tò mò, thì thử thứ khác. Thấy cô giáo phải dạy cả một lớp đông, có thể phải dùng những phương pháp chung, có hiệu quả (gây tò mò) với đa số học sinh, nhưng lại không có hiệu quả với một thiểu số khá lớn. Nhưng mỗi bậc phụ huynh thì chỉ có ít con, có thể tìm hiểu và thử nghiệm các phương pháp “personalized” hơn để gây tò mò cho con của mình, trong trường hợp nó đi học ở trường không thấy tò mò thích thú.

Hồi còn bé, tôi có được đọc cuốn sách “Người mặt nạ đen ở nước An giép” (dịch từ tiếng Nga), đọc rất say mê, và qua đó thấy thích giải phương trình. Sách viết về đại số, nhưng viết như là truyện trinh thám, được rất nhiều người thích. Những ai có con em đang học cấp 1 hoặc cấp 2, có thể thử cho con em mình xem cuốn sách đó (nếu nó chưa xem), có khi sẽ giúp cho nó tò mò thích học toán.

Nói về những “phương pháp chung để gây tò mò”, tôi thử liệt kê ở đây một vài phương pháp mà tôi biết (lúc nào tôi nhận ra là mình biết được thêm phương

pháp khác, sẽ bổ xung):

- “Nửa kín nửa hở”. Nửa kín nửa hở nhiều khi kích thích trí tưởng tượng và sự tò mò hơn là “hở cả”.
- Tạo hy vọng (đoạt giải, kiếm lời, ..., ví dụ như kiểu “cà rốt treo trước mũi con lừa”).
- Những thứ (số liệu, khẳng định, hình ảnh, ...) “lạ”, gây ngạc nhiên. Ngạc nhiên dẫn đến tò mò.
- Những điều (tưởng chừng như là) phi lý, mâu thuẫn, khiến cho não “ray rút”.
- Tạo “challenges”. Sướng không có nghĩa là dễ, khó không có nghĩa là khổ. Làm những cái khó (mà có thể làm được) có thể đem lại khoái cảm hơn nhiều là làm cái dễ.
- Nguyên tắc bắc cầu: cái gì liên quan được đến những cái gây tò mò, thì bản thân nó cũng sẽ gây tò mò.

---

## Phần 12 :

Trong phần này tôi muốn bàn đến việc nên làm thế nào để giúp trẻ em rèn luyện khả năng suy nghĩ sâu sắc (deep thinking).

Thế nào là suy nghĩ sâu sắc ? Một số đặc trưng của suy nghĩ sâu sắc là:

- Suy luận bắc cầu nhiều bước, chứ không dừng lại ở 1-2 bước đầu tiên (như trong chơi cờ: người suy nghĩ sâu là người tính trước mấy nước đi)
- Nhìn một vấn đề từ nhiều chiều nhiều hướng khác nhau, chứ không chỉ nghĩ “một chiều”.
- Tìm cách “nhận dạng” vấn đề và sự liên quan đến các vấn đề khác
- Không thỏa mãn với những câu trả lời “đơn giản hóa”, “giáo điều”, mà đi tìm những “lời giải thích” sâu sắc hơn.
- Lật đi lật lại vấn đề, kiểm tra các suy luận và thông tin.
- Mất nhiều thời gian để suy nghĩ cho một vấn đề

Trong đời sống của con người, hầu hết các hoạt động được làm theo phản xạ mà không cần suy nghĩ hoặc chỉ cần suy nghĩ đơn giản 1-2 bước. Nhưng có những việc quan trọng, đòi hỏi khả năng suy nghĩ sâu, ví dụ như phân tích tình hình, vạch chiến lược, hay là nghiên cứu một vấn đề xã hội hay một vấn đề khoa học. Những người “bình dân” có thể ít khi suy nghĩ sâu sắc, nhưng những người muốn tự nhận mình là “trí thức”, không thể không biết suy nghĩ một cách độc lập và sâu sắc.

Khả năng suy nghĩ sâu sắc không phải tự nhiên sinh ra mà có (trẻ em suy nghĩ rất giản đơn), mà là một kỹ năng có thể được tăng dần lên qua quá trình luyện tập thành thói quen. Theo các nhà thần kinh học thì không chỉ các kiến thức, mà cả các kỹ năng của con người cũng được ghi trong bộ nhớ của não. Tương tự như là máy tính, kiến thức thì được nhớ ở dạng dữ liệu (data) còn kỹ năng được nhớ ở dạng chương trình (programs). Trong đó có các “bản năng”, là các kỹ năng từ lúc sinh ra đã có sẵn trong bộ não, ví dụ như bản năng nghe nhìn, ăn uống, tự vệ, làm tình, v.v. (những thứ không ai dạy cũng biết làm ở mức độ nào đó), và các kỹ năng còn lại là do học được trong quá trình sống. Tất nhiên các kỹ năng có thể tốt lên (nếu được sử dụng và luyện tập thường xuyên) hoặc tồi đi cùng với thời gian.

Để có kỹ năng suy nghĩ sâu sắc, thì không có cách gì khác, là phải thường xuyên được luyện tập suy nghĩ sâu sắc. Một anh bạn tôi gốc do Thái (nhưng

không theo đạo Do Thái) có kể cho tôi một câu chuyện thú vị sau: đạo Do Thái rất là phức tạp, rất nhiều luật lệ, và những người theo đạo, từ đứa trẻ con, phải nghiêm chỉnh tuân thủ các luật đó. Có điều các luật đó lại mâu thuẫn với nhau, nhưng có 1 luật là: nếu 2 luật mâu thuẫn nhau, thì áp dụng luật nào quan trọng hơn (higher priority) trong hai luật đó. Ví dụ ngày thứ 7 không được lái xe ô tô và nói chung không được làm gì cả. Nhưng đúng hôm đó vợ đẻ mà không có cấp cứu thì sao? Nếu không chở xe đưa vợ đến bệnh viện, mà để ở nhà, thì vợ có thể chết, nhưng sự sống là quan trọng nhất. Bởi vậy trong trường hợp đó phải lái xe chở vợ đến bệnh viện. Đưa vợ vào đến viện rồi thì phải đi bộ (không còn lý do để đi xe nữa). Thế nhưng không được để xe trước cửa bệnh viện (cản đường người khác, có thể làm người khác bị chết) nên phải lái xe đi ra khỏi bệnh viện để vào chỗ nào đó đã. Thế nhưng đi cách khỏi cổng bệnh viện bao nhiêu mét, đến chỗ nào thì phải dừng lại và đến chỗ nào thì chưa được dừng lại, là câu hỏi khó tha hồ mà suy nghĩ! Hay là luật lệ về ăn uống của họ khá phức tạp, có nhiều cái cấm ăn. Thế nhưng lại có luật là “nếu ở chỗ đông người, thì không được làm ảnh hưởng xấu đến không khí ở chỗ đó”, nên nếu vì không ăn cái gì đó mà làm những người xung quanh méch lòng, thì có khi họ vẫn ăn. Từ khi nhỏ tuổi người Do Thái đã luôn gặp các tình huống phải suy nghĩ như vậy, khiến họ luôn luôn suy nghĩ, và “tự nhiên” trở thành các “thinkers”. Điều này một phần giải thích tại sao có nhiều người Do Thái thông minh. Người Việt Nam cũng có tiếng là “thông minh” (hay “khôn vặt” có khi chính xác hơn), vì luôn luôn “nghĩ mọ”.

Trong hầu hết các môn học đều có những câu hỏi, những vấn đề đòi hỏi phải suy nghĩ sâu. Có điều học sinh có được luyện suy nghĩ hay không, còn phụ thuộc vào cách dạy và cách thi cử. Nếu học chỉ để cốt nhớ như con vẹt, và khi đi thi cứ nhớ như vẹt là yên tâm được điểm cao còn “lý sự” lại bị trừ điểm, thì chẳng còn gì để mà suy nghĩ. Tôi lấy ví dụ môn sinh vật. Tôi tin rằng đó là môn rất hay, có rất nhiều cái để tò mò, khám phá, để suy luận. Nhưng mới đây khi tôi cầm xem một quyển sách về “học sinh vật qua các câu hỏi trắc nghiệm” bậc THPT thì phát sợ. Tôi không thể hình dung nổi làm sao học sinh phổ thông trung học có thể nhớ hết tất cả đồng thông tin rời rạc về sinh vật trong quyển sách đó. Một đề bài thi trắc nghiệm sinh vật chỉ có 60 phút mà có những 40 câu hỏi. Để trả lời được 40 câu hỏi thì phải nhớ và trả lời như cái máy thôi, chứ làm sao có thể “suy nghĩ” và “hiểu” gì, trừ khi là “thần đồng”. Bây giờ mà tôi phải đi học phổ thông, thi môn sinh vật có khi được 2 điểm. Hay là môn lịch sử, cũng là môn rất hay. Nhưng lối dạy và học hiện tại theo tối hiểu là học để nhớ một đồng các sự kiện ngày tháng, và nhớ luôn cả các bình luận lịch sử như “sách bảo” một cách giáo điều, mà không khuyến khích đào sâu suy nghĩ, khuyến khích “hiểu” lịch sử. Ông Nguyễn Anh đã được sách gọi là “cưỡi rắn cắn gà nhà” thì học sinh sẽ chỉ biết có vậy, không được phân tích sâu thêm về ông ta, về hoàn cảnh lịch sử giai đoạn đó. Không kể đến những môn chính trị đặc giáo điều, hay môn triết học biến tướng thành chính trị, ai học phải những môn đó mà dám thể hiện là mình “nghĩ sâu, nghĩ độc lập”, có khi “tiêu” luôn. Môn toán thường được coi là môn học đòi hỏi phải suy nghĩ nhiều nhất (chứ không chỉ nhớ) trong các môn học. Điều này có lý, vì số lượng kiến thức cần nhớ trong toán tương đối ít so với những môn khác, nhưng các bài tập toán thường đòi hỏi phải suy nghĩ ít ra vài ba bước, chứ không chỉ nhớ định lý, công thức là có ngay kết quả. Do đặc tính đó của môn toán, nên nó được dùng như là môn chủ đạo trong các kỳ thi tuyển vào đại học (kể cả cho các ngành mà về sau rất ít dùng đến kiến thức toán, nhưng cái gọi là “khả năng suy luận logic” thì hầu như ngành nào cũng dùng đến). Điều này là hợp lý, vì (ít ra về “lý thuyết”) để thi toán không chỉ nhằm kiểm tra kiến thức toán (tức là các công

cụ toán học đã được học), mà còn nhằm kiểm tra khả năng suy nghĩ logic sâu sắc của học sinh. Tất nhiên, để đạt được mục đích đó, thì trong đề thi cần có những bài đòi hỏi khả năng suy luận logic sâu sắc. Đề thi toán mà gồm toàn những câu hỏi tủn mủn, để đạt điểm cao không cần nghĩ sâu mà chỉ cần “nhớ nhiều, điền nhanh”, thì sẽ mất đi tác dụng kiểm tra khả năng suy nghĩ của môn toán. Đó chính là điều đáng lo ngại về xu hướng thi trắc nghiệm hiện tại. (Bản thân việc thi trắc nghiệm có những ưu điểm của nó, nhưng kiểu ra đề thi trắc nghiệm với toàn những câu hỏi tủn mủn là điều đáng lo ngại).

Trong môn toán (cũng như các môn khác), không phải bài tập nào, vấn đề nào, lý thuyết nào cũng sâu sắc (đòi hỏi suy nghĩ sâu) như nhau. Thế nào là một bài tập sâu sắc? Trong môn toán, những bài tập nào mà thường chỉ làm có trong vòng 10 phút là xong thì thường được coi là “dễ, hiển nhiên”, bài nào phải mất rất nhiều thời gian để suy nghĩ (có khi hàng tiếng đồng hồ hoặc hơn) thì là “sâu, khó”. Trong các kỳ thi IMO, đề thi mỗi ngày chỉ có 3 bài tập, và học sinh được giải trong vòng 4 tiếng rưỡi 3 bài đó. Trên trang web (blog)

[gowers.wordpress.com](http://gowers.wordpress.com) về toán học, có một ví dụ thú vị sau đây về một bài tập sâu sắc: Cho  $f$  là một hàm số liên tục từ  $\mathbb{R}$  vào  $\mathbb{R}$  với tính chất sau: với bất kỳ số dương  $a$  nào, thì dãy số  $f(a), f(2a), f(3a), f(4a), \dots$  tiến tới 0. CMR  $f(x)$  tiến tới 0 khi  $x$  tiến tới dương vô cùng. (Xem

<http://gowers.wordpress.com/2008/07/25/what-is-deep-mathematics/>). Bài toán trên không đòi hỏi kiến thức gì quá cao (học sinh cuối PTTH có thể hiểu và giải được nó), nhưng sâu sắc vì nó đòi hỏi suy luận nhiều bước, hướng giải và lời giải không hiển nhiên. Những học sinh nào mà tự làm được những bài như vậy, có thể coi là “học sinh giỏi toán” (giỏi ở đây chính là giỏi suy luận logic, và kỹ năng này rất quý bất kể về sau học sinh đi theo ngành gì). Những học sinh mà nắm vững các khái niệm về giới hạn và liên tục nhưng vẫn không giải được bài như vậy, thì không có nghĩa là “dốt toán”, mà chỉ là “không đến mức thật giỏi”. Có những bài toán tổ hợp mà những học sinh học lớp 3 cũng có thể hiểu được, nhưng về độ sâu sắc thì cũng không kém gì bài trên.

Việc giao và khuyến khích học sinh làm những bài tập sâu sắc là cần thiết, nếu muốn học sinh luyện suy nghĩ sâu. Cũng như trong chơi cờ (cũng là một môn tốt cho rèn luyện suy nghĩ): nếu chỉ chơi với toàn đối thủ quá kém hơn mình, thì khó mà tiến bộ, phải chơi nhiều với những đối thủ giỏi hơn hoặc bằng mình mới nhanh tiến bộ. Nhưng nếu chơi với toàn đối thủ giỏi quá, chỉ toàn thua mà không thắng được lần nào, thì cũng dễ chán. Trong việc học cũng vậy: nếu giao toàn bài quá dễ cho học sinh, thì học sinh sẽ thấy nhàm chán, nhưng nếu toàn bài khó quá không giải được và không gợi ý hướng giải, thì cũng không phải là cách rèn luyện hiệu quả. Nếu cho bài quá khó học sinh không giải được, rồi sau đó lại cho lời giải bắt học sinh học thuộc, thì cũng ít có suy nghĩ gì của học sinh ở đó.

Những tờ báo toán học cho học sinh phổ thông, như Kvant (của Nga), Mathematical Monthly (Mỹ), hay Toán Học Tuổi Trẻ, với những câu chuyện và bài tập sâu sắc trong đó, rất có ích cho việc giúp học sinh rèn luyện khả năng suy nghĩ sâu. (Tiếc là báo Toán Học Tuổi Trẻ có lúc không còn “sâu sắc” mà ngã theo hướng “luyện thi”).

---

Phụ lục (thảo luận Phần 9)

[Kinh nghiệm dạy về tập số thực](#)



Khi dạy định nghĩa tập số thực cho SV tôi làm như sau:

1. Nhắc lại về các số tự nhiên, số nguyên, phân số: con người đầu tiên là biết đếm (kể cả con mèo cũng biết đếm số lượng nhỏ!), tức là biết sử dụng số tự nhiên. Số không và số âm thì bắt đầu “trừu tượng”, vì tưởng tượng “âm 3 con gà” thật là khó, và thời cách đây quãng 1000 năm có những “triết gia” còn cãi nhau chí chóe về việc số 0 và số âm có tồn tại hay không. Thế nhưng bây giờ không còn ai bàn cãi về việc số âm có tồn tại hay không nữa, vì có những người cứ nhìn vào tài khoản ngân hàng đến cuối tháng bị âm là biết ngay 😊 Số hữu tỷ (phân số) nảy sinh khi người ta muốn chia chác, như là chia cái bánh pizza thành 6 miếng.

2. Khi người ta nhận thấy rằng tập các số hữu tỷ không đủ để mô tả hết tất cả các đại lượng, thì người ta nghĩ đến số thực. Ví dụ như tôi muốn xây cái căn phòng hình vuông diện tích 20m<sup>2</sup>, thì mỗi cạnh là căn bậc hai của 20, mà số đó không phải là số hữu tỷ. Dùng bàn tính của tôi thì tính ra căn bậc hai của 20 là 4,472135955. Số đó không phải căn bậc hai chính xác của 20, mà là chính xác đến 9 chữ số sau dấu phẩy. Nếu tôi chỉ cần chính xác đến 2 chữ số, thì tôi lấy số 4,47, hoặc nếu cần chính xác đến 3 chữ số thì lấy 4,472, ..., nếu cần chính xác đến bao nhiêu chữ số tôi cũng có cách để tính được (tuy rằng nếu đòi hỏi số lượng chữ số sau dấu phẩy quá lớn, ví dụ lớn hơn cả số lượng nguyên tử trong vũ trụ, thì “Chúa” chắc cũng chịu) ... Nói một cách toán học, chúng ta có một dãy số  $a_1 = 4,4$ ,  $a_2 = 4,47$ ,  $a_3 = 4,472$ , ... là những giá trị gần đúng, với sai số càng ngày càng nhỏ, của căn bậc hai của 20, và dãy số đó tiến tới (i.e. giới hạn của nó bằng) căn bậc hai của 20.

3. Nói một cách tổng quát, ta có thể định nghĩa một số thực, như là giới hạn của một dãy số hữu tỷ. Không phải dãy số hữu tỷ nào cũng có giới hạn. Ta chỉ lấy các dãy có giới hạn hữu hạn thôi. Nói về điều kiện để có giới hạn: các số trong dãy phải ngày càng gần nhau (điều kiện Cauchy) vì chúng phải càng ngày càng gần cái số giới hạn. Trong trường hợp là dãy tăng bị chặn, có thể CMR điều kiện Cauchy tự động được thỏa mãn. Ký hiệu tập tất cả các dãy số hữu tỷ thỏa mãn đ/k Cauchy (hoặc version khác: tập tất cả các dãy hữu tỷ tăng bị chặn) là E chẳng hạn.

4. Có một vấn đề là hai phân tử của E có thể cho cùng một số, tức là hai dãy số có cùng giới hạn. Khi nào xảy ra điều đó? Khi và chỉ khi hiệu của hai dãy đó là một dãy tiến tới 0. Kiểm tra đấy là quan hệ tương đương. Hai dãy là tương đương khi hiệu của chúng là một dãy tiến tới 0.

5. Tập số thực có thể định nghĩa là tập hợp thương: E chia cho quan hệ tương đương. Ánh xạ projection  $E \rightarrow \mathbb{R}$  chẳng qua là phép lấy giới hạn.

6. Tập số hữu tỷ được nhúng trong  $\mathbb{R}$  một cách tự nhiên, và coi là tập con của  $\mathbb{R}$ : mỗi số hữu tỷ  $q$  có thể được biểu diễn bằng dãy stationary  $(q, q, q, \dots)$

7. Các phép tính và thứ tự trên  $\mathbb{R}$ , suy ra từ các phép tính và thứ tự trên  $\mathbb{Q}$ , và phép lấy giới hạn

8. Tính đầy đủ của  $\mathbb{R}$ : mọi dãy Cauchy đều hội tụ.  $\mathbb{Q}$  trù mật trong  $\mathbb{R}$  (Phần này dành cho S/V học đến topo)

Cách định nghĩa  $\mathbb{R}$  như trên có tính chất “constructive” và đồng thời nhấn mạnh một điều: muốn định nghĩa  $\mathbb{R}$  cần khái niệm giới hạn, là khái niệm cơ bản nhất của giải tích toán học. Trong đại số chỉ có các phép  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $:$ . Giải tích có thêm phép lấy giới hạn; các phép lấy đạo hàm, tích phân đều định nghĩa qua phép lấy giới hạn.

Tôi không dùng lát cắt Dedekind. Lát cắt Dedekind chỉ là một trong những cách có thể để định nghĩa số thực. Nếu định nghĩa chỉ dừng lại ở lát cắt mà không nói xây dựng lát cắt thế nào, thì chỉ là định nghĩa hình thức không có tính constructive. Nếu nói đến xây dựng lát cắt thế nào, thì thực ra cũng trở về vấn đề các dãy Cauchy.

Tôi không định nghĩa tập  $N$  cho  $SV$ , vì tôi “assume” là họ hiểu khái niệm số tự nhiên rồi, tuy rằng họ có thể chưa nghe nói đến hệ tiên đề Peano bao giờ, và tôi cũng chưa có lúc nào dạy hệ tiên đề đó cho  $SV$ . Theo tôi nói chung mọi người đều hiểu đúng bản chất của số tự nhiên một cách trực giác. Hệ tiên đề Peano “chẳng qua” là “viết lại bằng ngôn ngữ hình thức” cái bản chất đó. Hệ tiên đề đó thú vị vì nó cho phép nhìn nhận tập số tự nhiên từ quan điểm “constructive, algorithmic”. Khi  $SV$  dùng thuật toán qui nạp để chứng minh các thứ, thì tức là đã dùng một cái tương tự như Peano rồi.

---

Phụ lục

### [Nhận xét về sách toán phổ thông của VN \(Apr/2007\)](#)

Trong đợt đi công tác VN tháng 04/2007 vừa rồi, tôi có tranh thủ tìm đọc một số sách toán phổ thông của VN để biết thêm về tình hình giáo dục trong nước. Tôi có nhờ một người bạn (Nguyễn Văn Minh, giảng viên toán ở ĐHSPTHN - cám ơn Minh) mua giùm toàn bộ các sách giáo khoa toán phổ thông (theo chương trình mới nhất) cộng thêm một số sách bồi dưỡng học sinh giỏi để xem. Tuy nhiên vì thời gian có hạn, tôi chỉ xem kỹ và đánh giá một số sách từ lớp 7 trở lên, các sách khác chỉ liếc qua.

#### **Nhận xét chung**

\* Chương trình có thay đổi, cao lên so trước đây. Nổi bật nhất là việc xuất hiện kiến thức thống kê toán học, và logic học và lý thuyết tập hợp, trong chương trình phổ thông (những thứ mà thời tôi là học sinh — những năm 70-80 — không có; tôi không biết cụ thể những mục đó được đưa vào chương trình từ lúc nào). Có phần vi tích phân hàm một biến (thời tôi là học sinh cũng không có), nhưng có lẽ phần này đã được đưa vào chương trình từ cách đây ít ra cả chục năm.

\* Nhìn chung, lượng kiến thức đưa vào chương trình phổ thông như vậy không phải là quá nhiều, và theo tôi một học sinh trung bình có thể học được lượng kiến thức như vậy (nếu có điều kiện học tốt, thầy bà tử tế; không nhất thiết phải đi học thêm). Tuy nhiên, có một số vấn đề về bố cục, logic chương trình, và cách trình bày những phần kiến thức mới. Cụ thể là, chương về lý thuyết tập hợp và logic tôi đọc thấy khá lủng củng. Phần thống kê được đưa vào ngay từ năm lớp 7 (không biết thế có sớm quá không — theo tôi là quá sớm, vì ở lớp 7 học sinh chưa đủ kiến thức để hiểu thống kê toán học ngoài việc “liệt kê bảng”), và sau đó xuất hiện tiếp ở năm lớp 10. Tuy nhiên lý thuyết xác suất (đi liền với thống kê) không hề được nhắc đến, và cách trình bày phần thống kê có vẻ còn gượng gạo.

\* Phần sách các năm lớp 1 cho đến lớp 6 xem lướt qua không thấy có gì đặc

biệt khác trước, ngoài việc tiến bộ về mặt in ấn và minh họa. Trong các sách mà tôi xem kỹ hơn (các sách từ lớp 7 trở lên), có thấy sự cố gắng của các tác giả làm cho sách hấp dẫn ở một số sách. Ví dụ như sách Hình Học 10 (Trần Văn Hạo, Nguyễn Mộng Hy, Nguyễn Văn Đoàn, Trần Đức Huyền, NXBGD, 2006) đọc khá hay, có nhiều ví dụ thú vị. Tuy nhiên, cũng còn nhiều chỗ ở nhiều sách mà tôi thấy có thể cải thiện sao cho sáng sủa hơn, học sinh dễ học hơn (xem cụ thể hơn phía dưới). Số lượng *ví dụ minh họa từ các bài toán thực tế (không phải bịa) cho các kiến thức lý thuyết* trong chương trình theo tôi nếu tăng được lên nhiều thì sẽ hấp dẫn hơn.

### **Sách giáo khoa toán lớp 7**

Tập 2 (các tác giả: Phan Đức Chính, Tôn Thân, ..., NXBGD, 2006 — Tôi không kịp xem Tập 1, nên chỉ nhận xét Tập 2)

Về mặt nội dung chương trình, có điểm mới so với chương trình trước đây tôi được biết, là có phần thống kê. Chương trình thống kê ở lớp 7 có các khái niệm tần số, tần suất, trung bình cộng, biểu đồ hình quạt.

Về mặt trình bày kiến thức, có mấy nhận xét nhỏ:

\* Định lý về 3 đường cao của một tam giác (trang 81) tại sao lại phải thừa nhận mà không chứng minh? Trong khi đó, ở đầu trang có đóng khung viết rằng 3 đường cao của 1 tam giác chính là 3 đường trung trực của một tam giác khác (tam giác đối). Đây chính là cách chứng minh, dựa trên điều đã biết về 3 đường trung trực!

\* Trang 84, viết về Euler: “Số lượng công trình nghiên cứu khoa học của ông ít ai sánh kịp”. Câu đó quá chung chung, và bởi vậy chứa ít thông tin. Có nhiều câu chung chung như vậy ở một số sách mà tôi xem.

### **Sách giáo khoa toán lớp 8**

Tập 1 (các tác giả: Phan Đức Chính, Tôn Thân, ..., NXBGD, 2006)

Về nội dung chương trình, không thấy có gì đặc biệt. Về cách trình bày, có một số điểm lạ đập vào mắt:

\* Nhiều công thức được nhại đi nhại lại, cùng một công thức được viết 2 lần ngay sát nhau, chỉ thay ký hiệu. (Điều này tôi đã được một đồng nghiệp phổ biết từ trước khi cầm quyển sách đọc). Ví dụ như trang 10, viết

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

rồi sau đó mấy dòng viết trong khung

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Rất nhiều công thức khác (và cả sách lớp 9) lặp đi lặp lại như vậy. Câu hỏi là có cần thiết như vậy không? Tại sao không viết một lần thôi, và giải thích là công thức đúng cho mọi số hoặc biểu thức A, B? Cách viết rườm rà chưa chắc đã giúp học sinh nắm bắt tốt hơn, mà có thể tạo thành kiểu học vẹt cứng nhắc? Sao không viết công thức một lần thôi, chứng minh nó, và cho nhiều ví dụ minh họa?

\* Ở nhiều §, ngay đầu § có một khung trong đó ghi một câu gì đó. Có điều có vẻ không nhất quán, lúc là câu hỏi, lúc là khẳng định, lại có lúc là câu cảm thán! Tôi đọc các câu đó có lúc thấy OK, nhưng cũng có lúc thấy “vô duyên”. Chẳng hạn ở trang 53 đầu §8 có câu “Thật là kì! Chia ... mà hóa ra nhân ...!” Tôi có lẽ không cảm nhận được cái tính hài hước của các tác giả. Không biết học sinh có phải ghi nhớ các câu đó không?

Tập 2 tôi có xem lướt qua, không thấy gì đặc biệt, ngoài chuyện tính thể tích các hình (không chỉ năm lớp 8 mà cả các năm khác) sẽ bàn thêm riêng.

### **Nhận xét về sách giáo khoa toán lớp 9 Tập 1 của VN**

(Phan Đức Chính, Tôn Thân, ..., NXBGD, 2006)

Một số nhận xét phê bình

\* Nhiều công thức viết lặp đi lặp lại (tương tự nhận xét sách lớp 8 )

\* Các bài về bảng tính, như §5 Chương 1 (bảng căn bậc hai) và §3 Chương 3 (bảng lượng giác) theo tôi là mất thời giờ vô bổ, vì trên thực tế có ai còn dùng các bảng đó không ? (Thay vì các bảng đó, nếu dạy được thuật toán tính gần đúng thì có ý nghĩa hơn).

\* Có mục về căn bậc ba, nhưng không nói gì về các căn bậc khác, mà cũng không nói gì đến công thức nào tính căn bậc 3. Nếu đã có công định nghĩa căn bậc 3, sao không định nghĩa các căn bậc khác luôn thể ?

\* trang 53, phần kết luận về 2 đường thẳng song song: nếu hai đường trùng nhau thì không được coi là song song à ?! (tại sao phải thêm điều kiện  $b \neq b'$ )

\* (cũng như các sách khác) tại sao lại hạn chế việc dùng máy tính vào máy casio fx-220, thay vì nói nguyên tắc chung, cho phép học sinh chọn máy tính tùy ý ?

Một nhận xét khen ngợi: ví dụ về tờ giấy A4 (trang 76) khá hay.

### **Nhận xét về sách giáo khoa hình học lớp 10 của VN**

Tôi có xem hai cuốn trong chương trình chính thức:

\* Hình Học 10 (Trần Văn Hạo, Nguyễn Mộng Hy, Nguyễn Văn Đoàn, Trần Đức Huyền, NXBGD, 2006)

\* Hình Học 10 Nâng Cao ( Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Phạm Vũ Khuê, Bùi Văn Nghị, NXBGD, 2006)

Về mặt chương trình, hai cuốn gần giống nhau. Khác nhau chủ yếu là cuốn nâng cao có thêm các mục về đường parabol và đường hypebol.

Về mặt cấu trúc các bài giảng, sách Hình Học 10 có vẻ cô đọng hơn trong khi sách Hình Học 10 Nâng Cao rườm rà hơn khi trình bày cùng một lượng kiến thức. Ví dụ như cộng và trừ vector thì sách Hình Học 10 gộp thành 1 mục (bài), còn sách Hình Học 10 Nâng Cao chia thành 2 bài, viết dài dòng hơn, tuy lượng kiến thức không nhiều hơn. Tôi thấy thích cách trình bày của cuốn Hình Học 10 hơn là cuốn Nâng Cao. Các định nghĩa định lý ở hai sách phát biểu tương đối giống nhau, tuy có khác nhau về mặt câu chữ. Có cảm giác là hai nhóm tác giả bỏ ra công sức làm những việc gần như trùng lặp nhau.

Sách Hình Học 10 viết khá hay, có nhiều ví dụ hấp dẫn, chẳng hạn như ví dụ về thuyền buồm đi ngược gió ở trang 13. Có lẽ đây là một trong những sách giáo khoa toán phổ thông VN hay nhất mà tôi được xem từ trước đến nay. Sách Hình Học 10 Nâng Cao cũng có nhiều ví dụ nhưng không nhiều và hay bằng.

Có một điều làm tôi rất băn khoăn là trong chương 1 về vector trên mặt phẳng (hai chiều), cả hai sách đều không hề nhắc đến chuyện 2 chiều, cứ đương nhiên coi như vector là chỉ có hai chiều. Trong khi đó trong chương trình các năm trước đã được học một số hình 3 chiều, và trong hình minh họa có vẽ vector vận tốc của một máy bay đang bay lên (là vector 3 chiều). Định lý biểu

điều một vector được thành tổ hợp tuyến tính của hai vector khác chỉ đúng cho trường hợp 2 chiều. Như vậy cả hai sách đều thiếu chính xác. Để cải thiện sách, cần ít ra ghi chú cho học sinh biết rằng trong Chương 1 chỉ xét các vector trên mặt phẳng (2 chiều).

Một vài nhận xét nhỏ khác:

\* Trang 67 sách Hình Học 10: nội dung câu chuyện về Leverrier tính toán ra hành tinh Neptune thì thú vị, nhưng cách viết rườm rà không hay. Chẳng hạn như câu cuối cùng, "Các nhà thiên văn học trên thế giới đã đánh giá rất cao phát minh quan trọng này của Lơ-ve-ri-ê", là hiển nhiên và không cần thiết.

\* Trang 81 sách Hình Học 10 Nâng Cao: thay vì viết điều kiện là "(a,b) khác (0,0)" hay "ít nhất một trong hai số a,b khác 0" trong sách viết là  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Tuy hai điều kiện đó là tương đương (đối với các số thực), nhưng viết như trong sách là không hay, vì nó sai trong trường hợp tổng quát hơn; để nguyên điều kiện "(a,b) khác (0,0)" thì đơn giản trong sáng hơn.

\* Trang 108 sách Hình Học 10 Nâng Cao: Hình minh họa rườm rà (có quá nhiều vòng tròn) và không chính xác (có những chỗ đường hypebol không đi qua điểm cắt của các đường tròn).

### **Nhận xét về sách giáo khoa đại số lớp 10 nâng cao của VN**

(các tác giả Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng, Trần Văn Vương, NXBGD, 2006 — vì thời gian hạn chế, nên tôi chỉ xem cuốn nâng cao)

Cái đầu tiên đập vào mắt là Chương 1 (Mệnh Đề - Tập Hợp) có vẻ chưa ổn. Tôi tự suy đoán rằng có lẽ do nó mới được đưa vào chương trình, nên chưa có nhiều thời gian để cải thiện sách giáo khoa cho thích nghi tương ứng. §4 của Chương 1 không ăn nhập gì với tiêu đề của chương. Ba mục đầu tôi đọc cũng có cảm giác lúng củng, cả về thứ tự trình bày lẫn logic.

Có 1 chương về thống kê. So với sách lớp dưới, có thêm khái niệm sai phương, độ lệch chuẩn, số trung vị, và mốt. Tôi chưa có ý kiến gì về chương này. (Câu hỏi để suy ngẫm: có nên dạy thống kê kiểu mỗi năm một ít, và không nói đến xác suất ?)

### **Các sách lớp 11 và 12**

Tôi có xem qua các sách giáo khoa toán lớp 11 và 12 tin quăng năm 2000.

Nhưng nghe nói bộ sách này sẽ sắp được thay bằng bộ sách mới của chương trình "cải cách", nên có lẽ không nên mất công nhiều bàn về nó. Tuy nhiên, có mấy nhận xét chung:

\* Sách Giải Tích lớp 12 (Ngô Thúc Lan chủ biên, tái bản lần thứ 6, năm 2005) xem qua thấy khá tốt. Trong sách cũng có đưa ra chứng minh toán học các công thức thể tích các hình khối.

\* Sách Hình Học lớp 11 (Văn Như Cương chủ biên, tái bản lần thứ 3, năm 2002): chủ yếu là hình học không gian. Các công thức diện tích thể tích nói chung cũng không được chứng minh. Có một điều lạ là công thức thể tích một hình lăng trụ lại được suy ra từ công thức thể tích một hình tứ diện. (Suy ngược lại thì có lẽ hợp lý hơn)

\* Sách Hình Học lớp 12 (Văn Như Cương chủ biên, tái bản lần thứ 6, năm 2006): Chương 1 lặp lại hoàn toàn các phần trong sách lớp 10, kể cả sách lớp 10 của chương trình chưa cải cách (?). Vector ở chương này cũng chỉ có 2

chiều. Đến chương 2 thì có vector 3 chiều. Chương 1 có thể coi là chương ôn tập (sách cũng viết đại loại như vậy).

### **Sách Giới Hạn Dãy Số & Hàm Số**

(chuyên đề bồi dưỡng HS giỏi toán phổ thông)  
của Nguyễn Văn Mậu và Nguyễn Thủy Thanh.

Tôi không được biết Nguyễn Thủy Thanh, nhưng GS Nguyễn Văn Mậu thì là thầy giáo dạy tôi lúc còn học chuyên toán cấp 3 ĐHTHHN (nay là ĐHTN), một người thầy giỏi và rất nhiệt tình với học sinh, nay là Hiệu Trưởng ĐHTN thuộc ĐHQGHN. Trong phần “preface” của sách có viết xin ý kiến độc giả, nên tôi cũng mạn phép nhận xét quyển sách này ở đây.

Nhận xét chung là chương trình của cuốn sách tương tự như mấy chương đầu của chương trình giải tích toán cho SV năm thứ nhất - thứ 2 ở đại học, nhưng lại không được bài bản bằng một số giáo trình giải tích cho SV mà tôi được biết. Theo tôi, đối với HS giỏi toán cấp ba, tốt nhất là nên đọc sách / học chương trình năm đầu của đại học một cách bài bản, cho khỏi bị rơi vào kiểu “mẹo mực”.

Nhận xét về một số bài/mục cụ thể:

Mục 5 Chương 2: Đây là mục về cách tính tích phân thì đúng hơn là mục về cách tính giới hạn, để vào chương 2 có vẻ nhầm chỗ. Các ví dụ trong mục đều là các dãy hằng, bài toán hoàn toàn là bài toán tính tích phân.

Mục 3 Chương 3 trang 74-75: tôi đọc không hiểu, có cảm giác là sách viết sai hay bỏ thiếu điều kiện về hàm  $F$  ở trong đó.

Mục 5 Chương 3: tôi đọc thấy “quái chiêu”, bài toán là tìm giới hạn, và lời giải tính được số  $A$  (giới hạn) qua số  $B$  mà công thức của số  $B$  thì không đơn giản gì hơn số  $A$ . Bài toán này chỉ nên ghi là bài toán chứng minh tồn tại giới hạn thì đúng hơn.

Chương 7: Mục 4 (chuỗi Leibniz) được đặt trước mục 5 (chuỗi hội tụ tuyệt đối). Thông thường thì SV được dạy về chuỗi hội tụ tuyệt đối trước chuỗi Leibniz. Khi không hội tụ tuyệt đối mới cần dùng các phương pháp khác khảo sát hội tụ đơn giản. Trong sách không nói đến định lý Abel cho hội tụ đơn giản, là định lý hay và ứng dụng được nhiều chuỗi. (Chuỗi Leibniz chỉ là trường hợp riêng của định lý Abel).

Một nhận xét nhỏ khác: tên các nhà toán học viết hình như có chỗ không chính xác: Dirichlet -> Dircchlet, Leibniz -> Leibnitz

### **Sách “Một Số Kiến Thức Cơ Sở về Graph Hữu Hạn”**

của Vũ Đình Hòa (chuyên đề bồi dưỡng HS giỏi, 2004)

Ấn tượng chung là cuốn sách là một tổ hợp các bài toán của các lĩnh vực khác nhau (hình học, số học, tổ hợp, giải tích, ...), mỗi thứ một ít, không thành một “lý thuyết đồ thị”. Cuốn sách này có thể là sách tham khảo thêm cho HS. Không coi là một môn học cơ bản (ở mức phổ thông cũng như mức đại học).

### **Diện tích, thể tích trong các sách hình học**

Các sách hình học có cho các công thức tính diện tích, thể tích một số hình. Tuy nhiên *thiếu những bài bản một cách hệ thống về các tích chất cơ bản của diện tích, thể tích*, và chứng minh toán học của các công thức. Chẳng hạn như tính chất: nếu 2 hình phẳng (khối) có các lát cắt có độ dài (diện tích) bằng nhau, thì hai hình đó có diện tích (thể tích) bằng nhau. Đây là một tính chất

trực giác, có thể coi như tiên đề (chứng minh chặt chẽ tính chất đó trong trường hợp tổng quát thì cần khái niệm độ đo/tích phân, nhưng học sinh hoàn toàn có thể cảm nhận nó một cách trực giác, và “chứng minh” nó qua phương pháp xấp xỉ). Tính chất khác: diện tích (thể tích) của “tổng” của hai hình không chồng chéo lên nhau thì bằng tổng của hai diện tích (thể tích). Dựa vào hai tính chất đó, có thể chứng minh một cách toán học chặt chẽ công thức tính thể tích hình tứ diện và hình cầu chẳng hạn (mà không cần khái niệm tích phân).

### **Toán thực nghiệm (Experimental Mathematics) ?**

Toán học, ngoài chuyện chặt chẽ, còn phần trực giác, thực nghiệm (các kết quả toán học nhiều khi đầu tiên là được đoán, sau đó mới tìm cách chứng minh sự phán đoán đó là đúng đắn; các khái niệm định nghĩa mới phải gắn liền nhiều với ví dụ cụ thể để cảm nhận bằng trực giác, ...). Ông V.I. Arnold (một nhà toán học Nga đương đại nổi tiếng) cho rằng toán thực nghiệm rất quan trọng trong việc giảng dạy môn toán (cả ở bậc phổ thông lẫn bậc đại học), và tôi tán thành quan điểm đó. Sách toán phổ thông ở VN có vẻ còn thiếu phần thực nghiệm, trực giác.

---

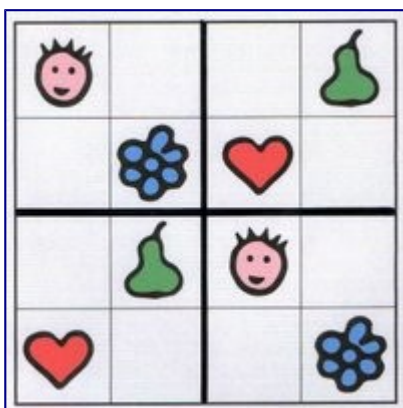
Phụ lục

#### [Vai trò của hài hước trong giảng dạy \(09/Oct/2010\)](#)

Có một định lý trong giáo dục học là:

*Tâm trạng của học sinh khi học ảnh hưởng rất lớn đến khả năng tiếp thu và kết quả học tập.*

Trạng thái tâm lý thuận lợi cho việc học là: thoải mái, vui vẻ, phấn khích, tập trung. Học mà vui sướng, tập trung và hăng say như là đang được chơi một trò thú vị, là học nhanh vào nhất. Ngược lại, nếu rơi vào một trong các trạng thái như hoang mang, sợ hãi, căm giận, bực bội, buồn chán, lơ đãng thì sẽ khó học được kiến thức vào đầu.



Theo bài báo nhan đề [“Humour as means to make mathematics enjoyable” của Shmakov & Hannula \(Univ. of Turku, Finland\)](#):

One “fundamental principle of human behavior is that emotions energize and organize perception, thinking and action” (Ref: Izard, The psychology of emotions, N.Y.: Plenum Press, 1991). Research has confirmed a positive relationship between positive affect and achievement. It seems that the affective outcomes are most important during the first school years, as they are less likely to be altered later on. Two key elements of a desired affective disposition are self-confidence and motivation to learn (Ref: Hannula, Affect in Mathematical Thinking and learning. In: J. Maaß & W. Schölglmann eds., New mathematics education research and practice, 2006).

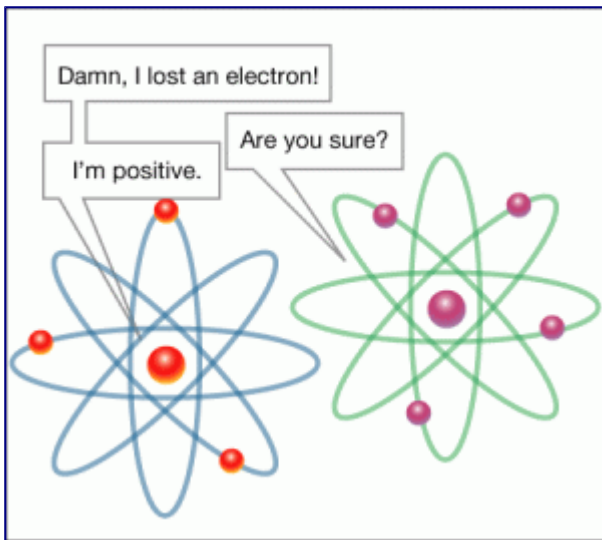
Nhiều phương pháp giáo dục cổ điển chỉ chú trọng đến phần kiến thức, nhồi nhét kiến thức, mà không đếm xỉa đến tâm lý học sinh. Thậm chí phần giáo dục, cầm đai đánh học sinh liên tục, khiến học sinh đi học mà như là bị tra tấn, học vì sợ đòn chứ mất hết niềm vui, học trong trạng thái ức chế, đọc đi đọc lại như con vẹt nhưng vẫn bị não thải ra vì trong trạng thái ức chế đó não khó chấp nhận ghi lại kiến thức mới mà chỉ muốn quên nó đi (vì muốn quên đi sự đau khổ khi học, nên quên luôn cả kiến thức đi kèm, vì cái này gợi nhớ đến cái kia)

Các phương pháp giáo dục hiện đại đang chú ý hơn đến việc làm sao cho học sinh “học mà phần khởi như chơi”, nhằm tăng hiệu quả của quá trình tiếp thu kiến thức. Một trong các phương pháp đó thậm chí có tên rất ngộ là CheCha (viết tắt của hai chữ Cheerful và Challenging gộp lại với nhau), được giới thiệu trong bài báo có nhắc tới phía trên của Shmakov & Hannula. Phương pháp CheCha dựa trên các câu truyện tranh ảnh hài hước và các “riddles” (bài toán đố) cũng như các trò chơi để kích thích trí tò mò của học sinh, và tạo không khí vui vẻ trong quá trình học.

Một ví dụ truyện cười trong bài báo của Shmakov và Hannula là: *Pooh và Piglet đang ngồi trên ghế băng nói chuyện với nhau, có Eeyore gửi 1 hộp kẹo có 10 cái kẹo trong đó, và kèm theo mẫu thư: gửi cho Pooh và Piglet, chia đều mỗi bạn 7 cái kẹo. Pooh thắc mắc “tớ không hiểu sao lại thế; cậu nghĩ thế nào?” Piglet bốc kẹo ăn rồi trả lời: “Tớ chả nghĩ gì cả, nhưng tớ ăn hết phần 7 cái kẹo của tớ rồi”.*

Tôi không quen dạy trẻ em nhỏ tuổi nên không biết câu chuyện trên có thuộc loại hóm hỉnh đối với trẻ nhỏ không (bản thân tôi thì thấy nó cũng hơi hóm hỉnh, nhưng có lẽ có những chuyện khác còn hóm hơn). Đối với toán ở bậc đại học, cũng có nhiều câu chuyện hóm hỉnh. Và bản thân các anecdotes về các nhà toán học và lịch sử phát minh ra các khái niệm toán học cũng rất ly kỳ, kể cho SV nghe có thể làm tăng kích thích tính tò mò của họ.





Một vài ví dụ về chuyện hài hước dùng cho dạy toán:

... Số nhị phân. Có 10 loại người trên thế giới: loại biết số nhị phân, và loại không biết số nhị phân.

... Logic. Pinocchio mỗi khi nói dối thì mũi dài ra, còn khi nói thật thì mũi không dài ra. Thế khi Pinocchio nói là “mũi tôi sẽ dài ra bây giờ” thì sao ?!

... Chuỗi số (khi nói về hội tụ & phân kỳ). Một nhà toán học tổ chức một giải xổ số, quảng cáo là “ai được giải sẽ được vô hạn tiền”. Sau khi một người trúng giải đến đòi giải, nhà toán học mới nói: Thế này nhé, tuần đầu anh sẽ nhận được 1 \$, tuần thứ hai 1/2 \$, tuần thứ ba 1/3 \$, và cứ như thế ...

... Lý thuyết tập hợp (khi nói về cardinal). Các bạn có biết câu “mọi người đều bình đẳng, nhưng có những người bình đẳng hơn những người khác ?” (Không nhớ có phải là của Orwell không ?). Trong toán cũng vậy, các tập vô hạn đều ... vô hạn, nhưng có những tập vô hạn hơn những tập khác !

... Giê Su là nhà toán học. Chứng minh: Giê Su cầm một cái bánh mì, rồi dùng định lý Banach-Tarski nhân ra thành nhiều cái bánh mì để chia cho mọi người ăn

... Số lớn. (Theo Richard Feynman). Giải ngân hà có đến  $10^{11}$  ngôi sao, nên trước đây cụm từ “số thiên văn” được dùng để chỉ các con số rất lớn, hơn chục chữ số. Nhưng nợ chính phủ (của Mỹ) ngày nay là hàng nghìn tỷ đô la, tức là những 13 chữ số, và bởi vậy bây giờ các con số rất lớn được gọi là “số kinh tế” !

---