UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER

Université de Toulouse

Faculté des Sciences et d'Ingénierie

Travaux dirigés - Fonctions

Chaque feuille de TD correspond à un cours en amphi et se décompose de la façon suivante :

- les pré-requis à connaître avant de s'attaquer aux exercices (et donc avant de venir en TD),
- les objectifs d'apprentissage des exercices présents dans la feuille,
- des exercices classiques qu'il convient de savoir faire après le TD,
- des exercices complémentaires qui peuvent remplacer ou compléter les exercices classiques.

À l'issue du TD, il est primordial de vérifier que les objectifs d'apprentissage ont bien été acquis et que les exercices classiques ont été compris. Les exercices proposés en complément permettent de s'entraîner en dehors du TD, seul ou en groupe, de façon à consolider les compétences acquises. Ils peuvent également être vus en TD et remplacer un exercice classique lorsque l'enseignant trouve cela pertinent.

Il est aussi possible de s'exercer en travaillant sur des livres d'exercices disponibles à la Bibliothèque Universitaire. Les références présentes dans le polycopié de cours proposent en général un grand nombre d'exercices corrigés.

Les exercices marqués par le symbole ⟳ sont des exercices pour lesquels l'aspect raisonnement l'emporte sur l'aspect calculatoire.

Il est inutile de lire ou d'apprendre la correction d'un exercice sans avoir pris le temps d'y réfléchir. Les corrections présentes à la fin de chaque feuille de TD sont là pour vous permettre de vérifier vos résultats et vous donner des idées de rédaction. Faites cependant attention au fait que les exercices ne sont pas tous corrigés de façon détaillée. Il est donc parfois nécessaire d'enrichir le corrigé avec les détails manquants. Merci de signaler à votre enseignant toute erreur que vous trouverez.

TD n°1

Pré-requis :
- pas de pré-requis particuliers

Objectifs :
- être capable de lire et de comprendre une assertion donnée à l'aide de connecteurs logiques et de quantificateurs
- mener une démonstration de façon rigoureuse

Exercice 1

1. Proposer un schéma de rédaction pour démontrer l'assertion (P ou Q).
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(\exists m \in \mathbb{N},\ m \leqslant n)$ ou $(\exists m \in \mathbb{N},\ m \leqslant -n)$.

Exercice 2

1. Écrire la table de vérité du "ou exclusif".
2. Écrire la négation de $P \Rightarrow Q$ et celle de (P et (Q ou R)).
3. Traduire les propositions suivantes dans le formalisme mathématique :
   - Tout entier naturel est pair ou impair.
   - L'équation $\exp(x) = x$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.
4. Traduire les propositions suivantes dans le langage courant :
   - $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \frac{p}{q} \neq \sqrt{2}$
   - $\forall n, n' \in \mathbb{N}^*,\ \exists p, p', q \in \mathbb{N},\ q = pn \text{ et } q = p'n'$.

Exercice 3

1. (Raisonnement direct) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leqslant b$ alors $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$ et $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$.
2. (Disjonction par cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2.
3. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?
4. (Contraposée) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
5. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
6. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Compléments

Exercice 4

Soit P, Q, R des propositions. Montrer les propositions suivantes :

1. (non (P et Q)) $\Leftrightarrow$ ((non P) ou (non Q)),
2. ((P ou Q) et R) $\Leftrightarrow$ ((P et R) ou (Q et R)).

Exercice 5

1. Traduire dans le formalisme mathématique la proposition "0 n'admet pas d'inverse".
2. Écrire la négation de cette proposition.
3. Montrer cette proposition.

Exercice 6. ⭮

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est un multiple de 3.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, si $10^n + 1$ est un multiple de 3 alors $10^{n+1} + 1$ est un multiple de 3. Que peut-on en déduire ?

Solution de l'exercice 1

1. Pour démontrer l'assertion (P ou Q), on peut écrire :
   (a) Supposons (non P).
   (b) Montrons Q. + démonstration.
   (c) Donc P ou Q.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que $\forall m \in \mathbb{N},\ m > n$.
   Montrons que $(\exists m \in \mathbb{N},\ m \leqslant -n)$. Comme $\forall m \in \mathbb{N},\ m > n$, on a en prenant $m = 0$ que $n < 0$. Ainsi, $-n > 0$ et on en déduit que $(\exists m \in \mathbb{N},\ m \leqslant -n)$ puisque $m = 0$ ou $m = 1$ conviennent.
   Donc $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(\exists m \in \mathbb{N},\ m \leqslant n)$ ou $(\exists m \in \mathbb{N},\ m \leqslant -n)$.

Solution de l'exercice 2

1. On trouve la table de vérité suivante :

$P \backslash Q$	V	F
V	F	V
F	V	F

2. La négation de $P \Rightarrow Q$ est (P et non Q) (il suffit de considérer les tables de vérité pour le voir). La négation de (P et (Q ou R)) est (non P ou (non Q et non R)).
3. – $\forall n \in \mathbb{N}, (\exists m \in \mathbb{N},\ n = 2m)$ ou $(\exists m' \in \mathbb{N},\ n = 2m' + 1)$,
   – $\exists! x \in \mathbb{R}, \exp(x) = x$.
4. – $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel,
   – Deux entiers naturels non nuls admettent un multiple commun.

Solution de l'exercice 3

1. On suppose $a \leqslant b$. Montrons que $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$ et $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$, c'est-à-dire montrons $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$ puis montrons $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$.
   Montrons $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$. Comme $a \leqslant b$, on a $a = \frac{a+a}{2} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{b+b}{2} = b$.
   Et montrons $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$. Comme $a \leqslant b$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a $a = \sqrt{a}\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \leqslant \sqrt{b}\sqrt{b} = b$.
   Donc $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$ et $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$ et ainsi si $a \leqslant b$ alors $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$ et $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $n(n+1)$ est divisible par 2. Nous distinguons deux cas.
   Premier cas : supposons n pair. Alors il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2n'$ et ainsi $n(n+1) = 2n'(n+1)$ est divisible par 2.
   Deuxième cas : supposons n impair. Alors il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2n' + 1$. Ainsi $n(n+1) = n(2n' + 1 + 1) = 2n(n' + 1)$ est divisible par 2.
   Conclusion : dans tous les cas, $n(n+1)$ est divisible par 2.
3. Pour $x = -3$, on a $x^2 = 9 > 4$ donc l'assertion $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$ est fausse.
4. Montrons que $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = 0$. On suppose $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors, comme $a \in \mathbb{Q}$, on a $b\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2}) - a \in \mathbb{Q}$. Si $b \neq 0$, on a $\frac{1}{b} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas possible car $\sqrt{2} = \frac{1}{b} b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ainsi $b = 0$.
   Par contraposée, on a démontré que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
5. Supposons par l'absurde que $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n^2+1} = m$. Ainsi, en élevant au carré, on trouve $n^2+1 = m^2$. Comme $m^2 = n^2+1 > n^2$, on a $m > n$. De la même façon, $m^2 = n^2+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2$ puisque $n > 0$. Donc $m < n+1$.
   Nous aboutissons à une contradiction. Donc $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
6. Montrons pas récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Initialisation : montrons que l'assertion est vraie pour $n = 1$. On a bien $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons $1+2+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.
   Conclusion : donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

TD n°2

Pré-requis :
- connaître la notion de domaine de définition d'une fonction
- définition du nombre dérivé d'une fonction
- savoir calculer une dérivée

Objectifs :
- savoir reconnaître une composée de fonctions
- savoir exhiber le domaine de définition d'une composée
- savoir dériver une composée de fonctions

Exercice 7

Pour chacune des fonctions ci-après, donner l'ensemble de définition et de dérivabilité, puis calculer la dérivée.

1. $f_1(x) = x^3\cos(5x+1)$,
2. $f_2(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$,
3. $f_3(x) = x\ln(x)$,
4. $f_4(x) = \ln(\cos(2x))$,
5. $f_5(x) = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$,
6. $f_6(x) = \ln(\mathrm{e}^x+1)$,
7. $f_7(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\cos(x)}}{\mathrm{e}^{\sin(x)}}$,
8. $f_8(x) = \left(\dfrac{2x+1}{4-x}\right)^5$.

Exercice 8

Soient u, v et w trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que les fonctions u, v et w sont dérivables. Calculer la dérivée de uvw.
2. On suppose que les fonctions u et v sont deux fois dérivables. Calculer la dérivée seconde de $u \circ v$.

Exercice 9. ↻

On note f' la dérivée de f. On note f'' la dérivée de f' qui est la ***dérivée seconde*** de f. Plus généralement, on note $f^{(n)}$ la ***dérivée n-ième*** de f. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de :
- $f : x \longmapsto \cos(x)$
- $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Compléments

Exercice 10

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$ puis en déduire les équations cartésiennes des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 11. ↻

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

1. Calculer les premières dérivées de f afin de conjecturer une expression de $f^{(n)}$.
2. Démontrer la conjecture précédente.

Solution de l'exercice 7

1. La fonction f_1 est le produit des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \cos(5x+1)$. La fonction puissance est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \cos(5x+1)$ est la composée de la fonction cosinus avec une fonction polynomiale (de degré 1). La fonction polynomiale est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction cos est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La composée $x \mapsto \cos(5x+1)$ est donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f_1 est donc un produit de fonctions définie, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, en utilisant la dérivée d'une composée de fonctions, nous trouvons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 3x^2\cos(5x+1) + x^3 \times 5\cos'(5x+1) = 3x^2\cos(5x+1) + x^3 \times 5 \times (-\sin(5x+1)) \\ &= x^2(3\cos(5x+1) - 5x\sin(5x+1)). \end{aligned}$$

2. Les fonctions exp et cos sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ entier, il en est donc de même pour la fonction f_2. En utilisant la dérivée d'une composée de fonctions, nous obtenons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_2'(x) = \cos'(x) \times e^{\cos(x)} = -\sin(x)e^{\cos(x)}.$$

3. La fonction ln n'est définie (et dérivable) que pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Le domaine de définition (et de dérivabilité) de la fonction f_3 est donc $\mathbb{R}^{+*}$. Sa dérivée est, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f_3'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

4. On cherche le domaine de définition d'une composée de fonctions. La fonction cosinus est à valeurs dans $[-1, 1]$ et la fonction ln n'est définie (et dérivable) que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour trouver le domaine de définition de la fonction f_4, il convient donc de trouver les x pour lesquels $\cos(2x)$ est strictement positif. La fonction cos est 2π-périodique donc la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est π-périodique. Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de longueur π, la fonction est strictement positive entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ strictement. On conclut que le domaine de définition de la fonction f_4 est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[$. La fonction f_4 est dérivable sur son domaine de définition. Sa dérivée vaut, pour tout $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[$,

$$f_4'(x) = -2\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = -2\tan(2x).$$

5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ n'est définie que lorsque $|x| \geqslant 1$ et elle est dérivable pour $|x| > 1$ (car la fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$). De plus, pour $|x| \geqslant 1$, on a $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x|$ donc la fonction $x \mapsto x - \sqrt{x^2-1}$ est toujours du signe de x. Comme la fonction ln est définie pour $x > 0$, on avons que le domaine de définition de f_5 est $[1, +\infty[$ et que son domaine de dérivabilité est $]1, +\infty[$. Sa dérivée est, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$f_5'(x) = \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)\frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

6. Comme la fonction exp est définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}$ et est toujours strictement positive, nous avons que la fonction f_6 est définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}$. De plus, sa dérivée vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_6'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

7. En utilisant les réponses des cas précédents, on trouve que le domaine de définition (et de dérivabilité) des fonctions $e^{\cos(x)}$ et $e^{\sin(x)}$ sont $\mathbb{R}$ entier. De plus, la fonction $e^{\sin(x)}$ ne s'annule jamais car la fonction exp ne s'annule jamais. On en déduit que le domaine de définition de la fonction f_7 est $\mathbb{R}$ entier. Sa dérivée vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_7'(x) = \frac{-\sin(x)e^{\cos(x)}e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}\cos(x)e^{\sin(x)}}{(e^{\sin(x)})^2} = -(\sin(x) + \cos(x))e^{\cos(x) - \sin(x)}.$$

8. La fonction $x \mapsto 4-x$ s'annule pour $x=4$. Le domaine de définition de la fonction f_8 est donc $\mathbb{R}\backslash\{4\}$. Il en est de même pour son domaine de dérivabilité. Sa dérivée est, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$,

$$\begin{aligned} f_8'(x) &= 5\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)'\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^4 = 5\left(\frac{2(4-x)-(2x+1)(-1)}{(4-x)^2}\right)\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^4 \\ &= 5\frac{9}{(4-x)^2}\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^4 = \frac{45}{(4-x)^2}\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^4. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8

1. En utilisant deux fois la formule donnant la dérivée d'un produit de fonctions dérivables, nous obtenons $(uvw)' = (u(vw))' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.
2. On dérive une première fois avec la formule de la dérivée d'une fonction composée. Ensuite, on dérive une deuxième fois en utilisant la formule de la dérivée d'un produit de fonctions et la formule de la dérivée d'une composée de fonctions. On trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (u\circ v)''(x) &= (u'\circ v \times v')'(x) = ((u'\circ v)'v' + (u'\circ v)v'')(x) = (u''\circ (v')^2 + (u'\circ v)v'')(x) \\ &= u''(v(x))(v'(x))^2 + u'(v(x))v''(x). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9

Les fonctions f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ entier. Dans la suite, la variable x appartient à $\mathbb{R}$. On étudie les dérivées n-ième de f et g pour des petits n de façon à conjecturer des formules pour $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$. On montre ensuite les conjectures par une récurrence.

Montrons par récurrence que $f^{(2n)}(x) = (-1)^n\cos(x)$ et $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\sin(x)$. Pour $n=0$ (initialisation), les deux formules sont justes. Supposons maintenant qu'elles sont vérifiées jusqu'au rang n et montrons qu'elles sont justes au rang $n+1$ (hérédité). On a d'après l'hypothèse de récurrence

$$f^{(2(n+1))}(x) = f^{(2n+1)'}(x) = ((-1)^{n+1}\sin(x))' = (-1)^{n+1}\cos(x)$$

et, en utilisant cette nouvelle égalité,

$$f^{(2(n+1)+1)}(x) = f^{(2(n+1))'}(x) = ((-1)^{n+1}\cos(x))' = (-1)^{n+2}\sin(x).$$

Le résultat est donc démontré.

Une autre possibilité est de remarquer que $-\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, que $-\cos x = \cos(x+\pi)$, que $\sin x = \cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ et ainsi de suite. On conjecture donc la formule $f^{(n)}(x) = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. Démontrons cette formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n=0$, la formule est juste puisque $\cos^{(0)}(x) = \cos x = \cos\left(x+\frac{0\times\pi}{2}\right)$.

Hérédité : supposons la formule vraie au rang n et montrons -là au rang $n+1$. On a

$$\cos^{(n+1)}(x) = \left(\cos^{(n)}(x)\right)' = \left(\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

où la deuxième égalité vient de l'hypothèse de récurrence. Finalement, on a donc démontré le résultat par récurrence.

De la même façon, on démontre que $g^{(n)}(x) = a^n e^{ax+b}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

TD n°3

Pré-requis :

- connaître la notion de fonction, son ensemble de départ (ou de définition) et son ensemble d'arrivée
- connaître les quantificateurs $\forall$, $\exists$, $\in$
- savoir interpréter une phrase simple formée à l'aide de quantificateurs

Objectifs :

- savoir donner l'ensemble des antécédents d'un ensemble par une fonction
- connaître les définitions d'ensemble image et d'image réciproque et savoir les calculer dans des exemples simples
- connaître les définitions de fonction injective, surjective et bijective et savoir les reconnaître

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Est-ce que la fonction f est surjective ?
3. Est-ce que la fonction f est injective ?

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.
Est-ce que f est bijective ?

Exercice 14

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + x - 2 \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R}^+)$ et $f(\mathbb{R}^-)$.
2. Déterminer $f(f^{-1}(\mathbb{R}^+))$ et $f^{-1}(f(\mathbb{R}^+))$
3. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est-ce que $\forall E \subset \mathbb{R},\ g^{-1}(g(E)) = E$?
4. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est-ce que $\forall E \subset \mathbb{R},\ g(g^{-1}(E)) = E$?

Compléments

Exercice 15

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array}$$

Est-ce que f est bijective ?

Exercice 16

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}$$

1. Est-ce que f est injective ?
2. Est-ce que f est surjective ?
3. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R})$.

Exercice 17. ○

On considère quatre sous-ensembles A, B, C, D de $\mathbb{R}$ et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$.
Démontrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Démontrer que :

$$\left(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\right) \Leftrightarrow \left(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\right).$$

Solution de l'exercice 12

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. La fonction f se réécrit
$$f(x) = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}.$$
Sa dérivée est donc égale à
$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}.$$
On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f'(x)$			$-$		$\Vert$	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2

2. La fonction f n'est pas surjective car on remarque sur le tableau que la valeur 2 n'est pas atteinte. On peut aussi le démontrer par le calcul en essayant de résoudre l'équation $f(x) = 2$ et en s'apercevant qu'elle n'admet pas de solution.
3. On voit cependant sur le tableau de variation que la fonction f est injective. On peut aussi le démontrer directement en partant de la définition de fonction injective.

Solution de l'exercice 13

Comme la fonction f est une fonction polynomiale de degré 3, on a que les limites en $-\infty$ (ou en $+\infty$) sont données par le signe du coefficient en facteur de x^3 multiplié par $-\infty$ (ou $+\infty$). On obtient alors que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors que la fonction f est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$. On cherche un antécédent de y pour f. Comme les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$, il existe $a \in \mathbb{R} = \mathscr{D}_f$ tel que $f(a) < y$ et il existe $b > a$ tel que $f(b) > y$. La fonction f est continue et on peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. On a alors, puisque $y \in [f(a), f(b)]$, qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.
Pour montrer l'injectivité, nous pouvons remarquer que la dérivée $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ne s'annule jamais car le discriminant du polynôme de degré 2 associé est négatif. La fonction f' reste donc du signe du coefficient en facteur de x^2 qui est positif ici. On en déduit que la fonction f est strictement croissante et donc injective grâce à un résultat du cours.
Finalement, la fonction f est bijective.
On peut aussi dressé un tableau de variation comme à l'exercice précédent et obtenir les mêmes conclusions.

Solution de l'exercice 14

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de f vaut $f'(x) = 2x+1$. Elle est négative pour $x \leqslant -\frac{1}{2}$, nulle pour $x = -\frac{1}{2}$ et positive pour $x \geqslant -\frac{1}{2}$. La fonction f est donc décroissante jusqu'à $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la limite en $+\infty$ vaut $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. On a ainsi $f(\mathbb{R}^+) = [f(0), +\infty[= [-2, +\infty[$. Sur $\mathbb{R}^-$, la fonction f est décroissante puis croissante, on trouve $f(\mathbb{R}^-) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[$.
2. Nécessairement, on a $f(f^{-1}(\mathbb{R}^+)) \subset \mathbb{R}^+$ (à démontrer en utilisant la définition de l'ensemble image et de l'image réciproque). La fonction f s'écrit $f(x) = (x+2)(x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on calcule le discriminant de l'équation $f(x) = 0$ et on trouve les racines associées). On a donc $f^{-1}(\mathbb{R}^+) =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$. De la même façon que pour le point précédent, du fait de la croissance de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on voit que $f(f^{-1}(\mathbb{R}^+)) = f(]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[) \subset f([1, +\infty[) = [f(1), +\infty[= \mathbb{R}^+$. Par contre, on trouve $f^{-1}(f(\mathbb{R}^+)) = f^{-1}([-2, +\infty[) =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$. En effet, $f(x) = -2$ se résout facilement et a pour solutions $x = -1$ et $x = 0$. L'étude faite au point précédent nous permet de conclure.
Pour les deux questions que l'on vient de traiter, il serait judicieux de faire une étude de la fonction f pour mieux comprendre les différents arguments utilisés.

3. Le point précédent nous permet de voir que $g^{-1}(g(E))$ n'est pas toujours égale à E. Cependant, les définitions d'ensemble image et d'image réciproque nous assurent que $g^{-1}(g(E)) \supset E$ pour tout $E \subset \mathbb{R}$.
4. Non, il suffit de considérer la fonction f et le sous-ensemble $E := [-4, -3]$. Par contre, on a toujours par définition $g(g^{-1}(E)) \subset E$ pour tout $E \subset \mathbb{R}$.

TD n°4

Pré-requis :

- connaître la notion de bijection
- connaître les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme
- connaître la notion de dérivabilité en un point

Objectifs :

- savoir définir la bijection réciproque
- comprendre la définition de la fonction logarithme, connaître son ensemble de définition et savoir calculer sa dérivée
- savoir calculer la dérivée d'une bijection réciproque

Exercice 18

1. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
   - $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$.
   - $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x - 7$.
   - $f_3 : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, $x \mapsto |x|$.
   - $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.
   - $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x$.
2. Soient $E = F = \mathbb{R}^{+*}$, vérifier que $f(x) = \frac{1}{x}$ définit une bijection de E sur E. Déterminez f^{-1}.
3. Montrez que la fonction $g :]1, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $g(x) = \frac{1}{x-1}$ est bijective. Calculez g^{-1}.
4. Déterminez E et F pour que $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ soit une bijection de E sur F. Déterminez h^{-1}.
5. Déterminez E et F pour que $k(x) = x^2 + 2$ soit une bijection de E sur F. Déterminez k^{-1}.

Exercice 19

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{3x+1}{4x+1}. \end{array}$$

1. Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}^+$ par cette fonction.
2. Déterminer l'image réciproque de $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
3. Proposer deux intervalles I et J, les plus grands possibles, tels que $0 \in I$ et tels que la fonction

$$\tilde{g} \ : \ I \to J, \ x \mapsto \frac{3x+1}{4x+1}$$

   soit bijective.
4. Déterminer une expression de $(\tilde{g})^{-1}$.

Exercice 20. ◌

On rappelle que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b$ et que $\ln :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de exp.

1. Démontrer que $\forall x, y \in]0; +\infty[,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. Démontrer ensuite que $\forall x \in]0; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n \ln(x)$.

Compléments

Exercice 21. ◌

Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la fonction f définie par $f_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$. On notera a^x l'expression $f_a(x)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f_a ?
2. Justifier la notation a^x utilisée pour désigner $f_a(x)$.
3. Démontrer que, dans certains cas, $x \mapsto a^x$ réalise une bijection. Préciser les ensembles de départ et d'arrivée.
4. Lorsque $x \mapsto a^x$ est bijective, déterminer sa bijection réciproque, sa dérivée et la dérivée de sa réciproque.

Solution de l'exercice 18

1. Nous étudions l'injectivité et la surjectivité des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5.
   - La fonction f_1 n'atteint que les carrés de $\mathbb{N}$. Elle ne peut donc pas être surjective (vous pouvez par exemple chercher à démontrer que 2 n'est pas un carré). Elle est cependant injective car si les entiers positifs x et y vérifient $x^2 = y^2$, on a alors $(x-y)(x+y) = 0$ et donc $x = y$ (puisque que x et y sont positifs).
   - La fonction f_2 est injective car $f_2(x) = f_2(y)$ est équivalent à $x = y$. Elle est surjective car pour tout $y \in \mathbb{Z}$, on a $f_2(y+7) = y$. La fonction f_2 est donc bijective.
   - La fonction f_3 est surjective car pour tout $y \in [0, +\infty[$, on a $f_3(y) = y$. Par contre, elle n'est pas injective puisque $f_3(-1) = f_3(1)$ (et $-1 \neq 1$).
   - La fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f_4'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f_4 est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et même strictement croissante pour $x \neq 0$. On en déduit qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (le démontrer). Ainsi, la fonction f_4 est injective sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $\lim_{x\to\pm\infty} f_4(x) = \pm\infty$ donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires comme lors du TD précédent, on trouve que la fonction f_4 est surjective.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_5(x) = x^3 - x = x(x^2-1)$. La fonction f_5 vérifie donc $f_5(-1) = f_5(0) = f_5(1)$. Elle n'est donc pas injective. Elle est cependant surjective pour la même raison que la fonction f_4.
2. Montrons tout d'abord l'injectivité de la fonction f : pour $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = x$. Nous étudions maintenant la surjectivité de f. Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^{+*}$. On a alors $f(x) = y$ donc la fonction f est surjective. Calculons maintenant la bijection réciproque de f : on a $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$, ainsi $f^{-1}(y) = x = \frac{1}{y}$ pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$.
3. Nous pouvons effectuer le même raisonnement que pour la question précédente. Cependant, il est aussi possible de remarquer que la fonction g s'écrit $g(x) = (f\circ t)(x)$, où $t(x) := x-1$ est définie sur $\mathbb{R}$, non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Les fonctions $t :]1, +\infty[\to]0, +\infty[$ et $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ sont des bijections telles que l'espace d'arrivée de t est l'espace de départ de f, leur composée est donc aussi une bijection (le démontrer) et on a $g^{-1}(y) = (f\circ t)^{-1}(y) = (t^{-1}\circ f^{-1})(y) = t^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} + 1$ pour tout $y \in]0, +\infty[$ puisque $t^{-1}(y) = y+1$. Il convient bien entendu de démontrer la formule : $(f\circ t)^{-1} = t^{-1}\circ f^{-1}$.
4. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ entier. Cependant, elle n'est pas injective car elle est paire. On se restreint donc à $E := \mathbb{R}^+$. On peut voir que la fonction h est injective sur E à l'aide d'un calcul direct ou en utilisant le fait que la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On a de plus $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0$ donc en choisissant $F :=]0, 1]$, on trouve la bijection souhaitée. On a alors $y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow h^{-1}(y) = x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$ pour tout $y \in]0, 1]$. La dernière équivalence utilise le fait que $x \geqslant 0$.
5. On peut choisir $E := \mathbb{R}^-$ et $F := [2, +\infty[$. On trouve $k^{-1}(y) = -\sqrt{y-2}$.

Solution de l'exercice 19

1. L'application g se réécrit $g(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{4x+1}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = -\dfrac{1}{(4x+1)^2}$. Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et son image directe est $]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)] = \left]\frac{3}{4}, 1\right]$.
2. Comme la fonction g est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$, il nous suffit de trouver les $x \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) \geqslant \frac{4}{5}$, c'est-à-dire les x tels que $x \leqslant 1$. Nous avons donc $g^{-1}\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) = [0, 1]$.
3. La fonction $\tilde{g}$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ puisque dans ce cas le dénominateur ne s'annule pas. On a donc $I := \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ (il ne peut pas être choisi plus grand car le dénominateur de $\tilde{g}$ s'annule en $-\frac{1}{4}$). On trouve alors $J := \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}$ en étudiant la fonction $\tilde{g}$ à l'aide d'un tableau de variation (ou en résolvant l'équation $\tilde{g}(x) = y$ en x : voir la réponse suivante). L'intervalle I contient bien 0.
4. On a $y = \dfrac{3x+1}{4x+1} \Leftrightarrow \tilde{g}^{-1}(y) = x = \dfrac{1-y}{4y-3}$ qui est bien définie pour $y \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Solution de l'exercice 20

1. En utilisant les indications de l'énoncé, on trouve $\ln(xy) = \ln\left(e^{\ln(x)}e^{\ln(y)}\right) = \ln\left(e^{\ln(x)+\ln(y)}\right) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. On obtient ensuite par récurrence la formule $\ln(x^n) = n\ln(x)$. En effet, la propriété est vraie pour $n = 0$ (initialisation) et on prouve l'hérédité en utilisant la formule démontrée au point précédent.

TD n°5

Pré-requis :

- connaitre les valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus
- savoir dériver les fonctions cos et sin
- savoir étudier le signe des fonctions cos et sin

Objectifs :

- comprendre le procédé de construction des fonctions arccos, arcsin et arctan
- connaître les ensembles de définition et dérivées de arccos, arcsin et arctan
- mener des calculs simples avec les fonctions arccos, arcsin et arctan

Exercice 22

Donner le domaine de définition et calculer les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(\arcsin(x))$,
2. $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$,
3. $x \mapsto \cos(\arccos(x))$,
4. $x \mapsto \arccos(\cos(x))$,
5. $x \mapsto \tan(\arctan(x))$,
6. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$.

Exercice 23

1. Calculer les valeurs de arccos et arcsin en 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Idem pour arctan en 0, 1, $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Calculer $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right)$. Idem avec $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right)$ et $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{3}\right)$ (attention aux intervalles !).
3. Calculer $\cos(\arcsin x)$, $\tan(\arcsin x)$, $\cos(\arctan x)$.
4. Calculer le domaine de définition et de dérivabilité de $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, puis calculer sa dérivée. En déduire que $f(x) = \arcsin x$, pour tout $x \in]-1,1[$.
5. Montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in [-1,1]$.

Exercice 24

1. Calculez $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\arccos\left(\frac{-1}{2}\right)$.
2. Calculez $\arccos\left(\sin(\frac{3\pi}{2})\right)$ et $\arcsin\left(\cos(\frac{\pi}{17})\right)$.
3. En utilisant les formules de trigonométrie habituelles, simplifiez les expressions suivantes :
$$\sin(2\arcsin(x)),\ \cos(2\arccos(x)) \text{ et } \sin^2\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right).$$

Compléments

Exercice 25

1. Calculez $\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$, $\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$, $\arccos\left(\cos(\frac{5\pi}{6})\right)$, $\sin(\arcsin(1))$, $\arcsin(\sin(1))$ et $\arctan(\tan(3))$.
2. Calculez $\arcsin\left(\sin(\frac{11\pi}{7})\right)$ et $\arctan\left(\tan(-\frac{17\pi}{5})\right)$.
3. En utilisant les formules de trigonométrie habituelles, simplifiez les expressions suivantes : $\sin(\arccos(x))$, $\cos(2\arcsin(x))$, et $\sin(\arctan(x))$.

Exercice 26

Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \operatorname{sign}(x)\frac{\pi}{2}$.

Exercice 27

On considère la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée (simplifier au maximum l'expression de f').
2. En déduire une autre expression de f.

Solution de l'exercice 22

1. La fonction est définie sur $[-1, 1]$ car arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et que son image est $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ qui est incluse dans le domaine de définition de sin qui est $\mathbb{R}$. On a $\sin(\arcsin(x)) = x$ sur cet intervalle.
2. La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[-1, 1]$. Comme le domaine de définition de arcsin est $[-1, 1]$, on a que la fonction considérée est définie sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction arcsin est la fonction réciproque de sin sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a que $\arcsin(\sin(x)) = x$ sur cet intervalle. Par contre, ce n'est plus le cas en dehors de cet intervalle. On note $k = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x. Montrer l'égalité $\arcsin(\sin(x)) = (-1)^k(x - k\pi)$.

Solution de l'exercice 23

1. On a $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(1) = 0$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. De même, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. On trouve aussi $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ et $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.
2. En faisant bien attention aux intervalles sur lesquels on se trouve, on obtient $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.
3. On a $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. On en déduit pour tout $x \in [-1, 1]$, $\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. En utilisant encore l'égalité $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, on trouve $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin'(x)$. Ainsi, on a $f(x) = \arcsin(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. On calcule C en comparant les valeurs en $x = 0$. On trouve $f(0) = 0 = \arcsin(0)$ donc $C = 0$ et on a bien $f(x) = \arcsin(x)$.
5. Indication : calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$.

Solution de l'exercice 24

1. Nous avons $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc comme la fonction arcsin est la fonction réciproque de la fonction sin sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, nous obtenons $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$.
   Nous avons $\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ donc comme arccos est la fonction réciproque de cos sur l'intervalle $[0, \pi]$, on choisit la valeur $\frac{2\pi}{3}$ et on a $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$.
2. On a $\arccos\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arccos(-1) = \pi$. En utilisant le fait que $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, on trouve $\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{17}$.
3. Pour $x \in [-1, 1]$, nous avons $\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$. De la même manière, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\cos(2\arccos(x)) = 2x^2 - 1$ et $\sin^2\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right) = 1 - \frac{x+1}{2} = \frac{1-x}{2}$.

TD n°6

Pré-requis :
- savoir déterminer le signe d'une expression
- savoir calculer une dérivée
- savoir construire un tableau de variations
- fonctions exponentielle et logarithme népérien

Objectifs :
- exploiter un tableau de variations et la présence de tangentes horizontales pour construire une courbe
- exploiter la parité et/ou la périodicité d'une fonction pour construire une courbe
- exploiter la convexité d'une fonction pour construire une courbe

Exercice 28

1. Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont toutes les deux paires. Que peut-on dire de la parité de leur somme $f+g$? leur produit $f \times g$? leur composée $g \circ f$?
2. Même question en supposant f et g impaires, puis en supposant f paire et g impaire.

Exercice 29

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Montrez que $|f|$ est majorée par $\frac{1}{2}$ et tracez son graphe.
2. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin\left(\pi f(x)\right)$, où f est définie à la question précédente. Déduisez de l'étude de f les variations, la parité, la périodicité de g et tracer son graphe.

Exercice 30

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2\ln(x) - x^2$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique.
3. Dressez le tableau de variation de f.
4. Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de f.
5. Tracer le graphe de f et déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Compléments

Exercice 31

On note $\{x\} = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x. Tracez le graphe de la fonction $x \mapsto \{x\}$ et montrez qu'elle est périodique.

Exercice 32

1. Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$. Après avoir fait une étude de la fonction f, dressez l'allure de sa courbe représentative.
2. Etudier la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ afin d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 33. ◌

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe.

1. Démontrer que si f est majorée alors f est constante.
2. Est-ce que ce résultat reste vrai pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$?

Solution de l'exercice 28

1. Comme les fonctions f et g sont paires, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = g(x)$. On en déduit que $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$. Donc la fonction $f+g$ est paire. De façon similaire, on démontre que les fonctions $f \times g$ et $g \circ f$ sont paires.
2. On suppose que les fonctions f et g sont impaires, on a donc $f(-x) = -f(x)$ et $g(-x) = -g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$. Donc la fonction $f+g$ est impaire. On trouve aussi $(f \times g)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (f \times g)(x)$. La fonction $f \times g$ est donc paire. Un calcul similaire montre par contre que la composée $g \circ f$ est impaire.
   On suppose maintenant f paire et g impaire. On ne peut alors rien dire sur la somme $f+g$. Cependant, le produit $f \times g$ est impair et la composée $g \circ f$ est paire.

Solution de l'exercice 29

1. D'une part, on a $\dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{(x-1)^2}{2(1+x^2)} \leqslant 0$ et d'autre part, on trouve $\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{(x+1)^2}{2(1+x^2)} \geqslant 0$. On en déduit que $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. On remarque que la fonction f est impaire, il est donc suffisant de comprendre son graphe sur $\mathbb{R}^+$ pour le comprendre sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0,1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ (donner un tableau de variation si besoin). On a alors des indications suffisantes pour tracer le graphe de f.
2. Les fonctions sin et f sont impaires, on en déduit avec la même méthode qu'à l'exercice 28 que la fonction g est impaire. Comme la fonction f est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, on a que la fonction πf est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Comme la fonction sin est injective sur cet intervalle, on en déduit que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(y)$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. Comme la fonction f n'est pas périodique, on en déduit que la fonction g n'est pas périodique. Pour des petites valeurs de x, la fonction sin est proche de la fonction $x \mapsto x$, on conclut donc que le graphe de g ressemble grossièrement au graphe de f. On peut aussi étudier le tableau de variation de g.

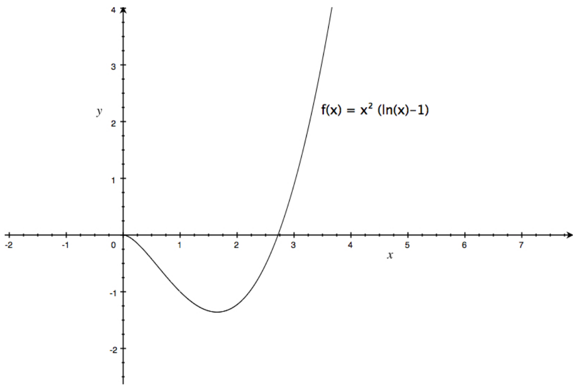
Solution de l'exercice 30

1. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et les fonctions polynomiales sont définies sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. On a $f(x) = x^2(\ln(x)-1)$. Comme $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x)-1) = +\infty$, on obtient que le produit $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Comme $\frac{f(x)}{x} = x(\ln(x)-1)$, on obtient de la même façon que précédemment que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Le résultat de la première limite nous dit que la fonction f part à l'infini lorsque x tend vers $+\infty$. Le résultat de la deuxième limite nous assure que la fonction f part à l'infini plus vite que la fonction identité id (qui associe x à x) lorsque x tend vers $+\infty$. On a donc que le graphe de la fonction f se retrouve au-dessus du graphe de la droite $y(x) = x$ qui correspond au graphe de la fonction identité ($\mathrm{id}(x) = x$). Comme la limite est $+\infty$, on peut même dire que le graphe de la fonction f est "fortement" au-dessus de la droite $y(x) = x$ lorsque x est grand.
3. On calcule tout d'abord $f'(x) = 2x(\ln(x)-1) + x = (2\ln(x)-1)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On trouve alors le tableau de variation suivant :

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   Attention : la fonction f n'est pas définie en 0 car la fonction logarithme n'est pas définie en 0. Cependant, on peut chercher à calculer la limite de f en 0. On trouve qu'elle existe et qu'elle vaut 0 du fait que les fonctions polynomiales de degré $\geqslant 1$ l'emportent sur la fonction ln.
4. Pour étudier la convexité et la concavité de f, il convient de calculer la dérivée seconde de f. On trouve $f''(x) = 2 + (2\ln(x)-1) = 2\ln(x)+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On a alors $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant e^{-\frac{1}{2}}$ et $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in \left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$. La fonction f est donc concave sur l'intervalle $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ et convexe sur l'intervalle $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.

5. On obtient le graphe suivant :



La tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est donnée par l'équation $y(x) = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{3}{e}\left(x-\frac{1}{e}\right)-2e^{-2}$.

TD n°7

Pré-requis :
- savoir reconnaître un quotient, un produit...
- savoir factoriser
- maîtriser la notion de limite
- connaître les limites des fonctions racines, polynômes, exponentielle et logarithme
- connaître les théorèmes de comparaison

Objectifs :
- savoir calculer une limite en utilisant les règles de calcul
- savoir calculer une limite en utilisant les théorèmes de croissances comparées
- savoir déterminer les asymptotes à une courbe
- savoir construire l'allure d'une courbe en utilisant pertinemment les asymptotes éventuelles

Exercice 34

Calculez les limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(10x+3)e^x$,
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{6x}-e^{5x}$,
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-xe^x+1$,
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-xe^x+1$,
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{e^x+4}$,
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Exercice 35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Après une étude pertinente de f, donnez l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 36. ⟳ Comparaison exponentielle/polynôme en $+\infty$

Pour $n\geqslant 0$, on considère la fonction $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x)=\mathrm{e}^x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1. Calculer $f_n'(x)$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n\geqslant 0$, f_n est croissante sur $[0,+\infty[$.
3. En déduire que pour tout $x\geqslant 0$, on a :
$$\mathrm{e}^x\geqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
4. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ puis que $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\,\mathrm{e}^x=0$.
5. Soit $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ un polynôme. En utilisant l'égalité $\dfrac{\mathrm{e}^x}{P(x)}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}\times\dfrac{x^n}{P(x)}$, déterminer suivant le signe de a_n la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{P(x)}$.

Compléments

Exercice 37

Étudier la fonction définie par $f(x)=\ln(\cosh(x)-x)$. On s'intéressera aux droites asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 38

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^x}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Démontrez que $\mathscr{C}_f$ n'admet aucune asymptote oblique en $+\infty$.

Solution de l'exercice 34

1. Lorsque $x \to +\infty$, la limite des fonctions $x \mapsto 10x+3$ et exp est $+\infty$. La limite du produit est donc $+\infty$.
2. La limite lorsque $x \to +\infty$ des fonctions $x \mapsto e^{6x}$ et $x \mapsto e^{5x}$ est $+\infty$. On ne peut donc pas conclure quant à la limite de la soustraction des deux fonctions. On cherche alors à factoriser (par le terme qui semble nous l'emporter). On a $e^{6x} - e^{5x} = e^{6x}(1-e^{-x})$. Lorsque $x \to +\infty$, la limite des fonctions $x \mapsto e^{6x}$ et $x \mapsto 1-e^{-x}$ est 1. La limite du produit est donc $+\infty$.
3. Étudions individuellement les termes de la somme : on a $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ car la fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions polynômes (voir le résultat sur les croissances comparées dans le cours) et $\lim_{x\to-\infty} 1 = 1$. En utilisant le fait que la limite d'une somme de limites finies est la somme des limites, on obtient $\lim_{x\to+\infty} e^x - xe^x + 1 = 1$.
4. Cette fois-ci, on ne peut pas conclure en étudiant individuellement les différents termes de la somme (pourquoi ?). On cherche à nouveau à factoriser. On a $e^x - xe^x + 1 = xe^x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{xe^x}\right)$ lorsque $x \neq 0$. La limite de la fonction $x \mapsto xe^x$ en $+\infty$ est $+\infty$. La limite de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{xe^x}$ en $+\infty$ est -1. La limite du produit est donc $-\infty$.
5. On trouve ici $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{e^x+4} = 0$.
6. On trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Solution de l'exercice 35

Commençons par décrire le tableau de variation de f. Nous avons $f'(x) = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$. Pour connaître le signe de f', il suffit donc de connaître le signe de x^4-4x^2-1 en fonction de x. On voit que ce polynôme de degré 4 en x est en fait un polynôme de degré 2 en x^2. Ce dernier polynôme est X^2-4X-1. Son discriminant vaut 20 et les racines du polynômes sont donc $X_1 = \frac{4+\sqrt{20}}{2} = 2+\sqrt{5}$ et $X_2 = 2-\sqrt{5}$. On remarque que la racine X_2 est négative, il n'existe donc pas de x réel tel que $x^2 = 2-\sqrt{5}$. Les solutions réelles de l'équation $x^4-4x^2-1=0$ sont donc $\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$. Le signe en $\pm\infty$ de $f'(x)$ est donné par le terme de plus haut degré et on a donc que la dérivée est positive pour $|x| \geqslant \sqrt{2+\sqrt{5}}$. On calcule ensuite le signe de f' au voisinage de ± 1 pour finir de compléter le tableau de variation. On trouve finalement

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		-1		1		$\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variation montre des asymptotes verticales en ± 1.On cherche ensuite les asymptotes en $\pm\infty$. Si elle existe, on calcule la limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$. Si la fonction possède une asymptote oblique, alors son coefficient directeur est 1. On saura que la fonction admet une asymptote oblique si la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$ existe. On trouve $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x}{x^2-1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x-(x(x^2-1))}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$. La fonction f admet donc une asymptote oblique d'équation $y(x) = x$ en $+\infty$. Le même calcul permet d'obtenir l'asymptote oblique en $-\infty$.

Solution de l'exercice 36

1. On a $f_n'(x) = \left(e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)' = e^x - \frac{x^n}{n!} = f_{n-1}(x)$.
2. Nous démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la fonction f_n est croissante.
   - Initialisation : on a $f_0(x) = e^x - x$ et $f_0'(x) = e^x - 1 \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f_0 est croissante sur $[0, +\infty[$.
   - Hérédité : supposons que pour tout $k \leqslant n$, la fonction f_k est croissante et montrons que la fonction f_{n+1} est croissante. On a $f_{n+1}' = f_n$ d'après la question précédente. De plus, la fonction f_n est croissante par hypothèse de récurrence. On a donc que $f_n(x) \geqslant f_n(0) = e^0 - 0 = 1 \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. La fonction f_n est donc positive sur $\mathbb{R}^+$ et on en déduit donc que la fonction f_{n+1} est croissante.

   On a ainsi démontré le résultat souhaité par récurrence.

3. Comme la fonction f_n est croissante, on a $f_n(x) \geqslant f_n(0) = 1 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. On en déduit que $e^x \geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
4. D'après la question précédente, on a $\frac{e^x}{x^n} \geqslant \frac{x}{(n+1)!}$. On a alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} \geqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(n+1)!} = +\infty$ (le nombre n est fixé). De la même façon et en utilisant la formule de composée de limites, on a $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{y\to+\infty} (-y)^n e^{-y} = (-1)^n \lim_{y\to+\infty} \frac{y^n}{e^y}$. De plus, $\lim_{y\to+\infty} \frac{(n+1)!}{y} = 0$. On en déduit que $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.
5. On a $\frac{x^n}{P(x)} = \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}}$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{P(x)} = \frac{1}{a_n}$. En utilisant la formule donnant la limite d'un produit à l'aide de la limite de chaque terme du produit, on trouve à l'aide de la question précédente $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{P(x)} = \mathrm{sgn}(a_n)\infty$, où $\mathrm{sgn}(a_n)$ est le signe de a_n (c'est-à-dire $+1$ si $a_n > 0$ et -1 si $a_n < 0$).

TD n°8

Pré-requis :
- savoir ce qu'est une primitive, une intégrale
- savoir calculer les primitives les plus simples (polynômes, celles données dans le formulaire)
- connaître les propriétés de linéarité de l'intégrale

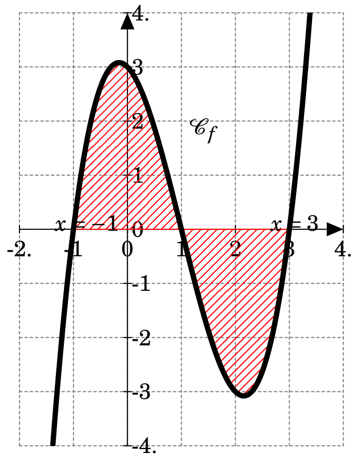
Objectifs :
- améliorer sa technique de calcul de primitive
- valeur moyenne d'une fonction
- savoir encadrer une intégrale
- maîtriser le lien intégrale/calcul d'aire

On a vu en cours comment calculer l'aire comprise en l'axe des abscisses, deux droites verticales et une fonction de signe constant. Ce qui suit nous permet de généraliser à une fonction de signe non constant.

Exercice 39. Lorsque f change de signe

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x = -1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe représentant la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$.

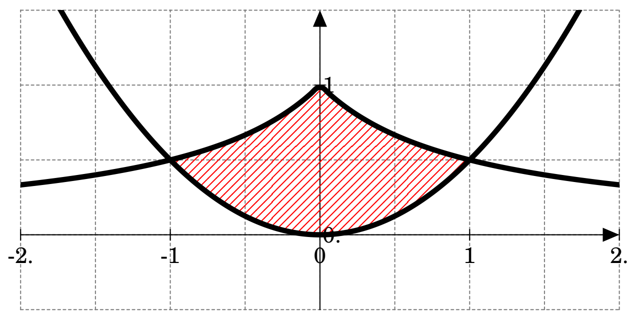
1. Dressez le tableau de signe de $f(x)$.
2. Proposez une méthode permettant de calculer l'aire hachurée en rouge.
3. Calculez cette aire. Exprimez le résultat en unités d'aire.



Exercice 40. Calculer l'aire du plan comprise entre deux courbes

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et les courbes représentant les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$.

1. Déterminez les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Après avoir identifié $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur le graphique ci-contre, vérifiez le résultat de la question précédente.
3. Proposez une méthode permettant de calculer l'aire hachurée en rouge. Quelle propriété de cours permet de justifier cette méthode ?
4. Calculez cette aire. Exprimez le résultat en unités d'aire.



Exercice 41

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Quelle est la valeur moyenne d'une fonction constante sur $[a, b]$? Quelle est la valeur d'une fonction affine sur $[a, b]$?
2. Démontrer que la valeur moyenne sur $[a, b]$ de f appartient à $[m, M]$ où m (resp. M) est le minimum (resp. maximum) de f sur $[a, b]$.

Compléments

Exercice 42

Soit f une fonction continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[x, x+T]$ est indépendante du réel x. On l'appelle valeur moyenne de f.
2. Déterminer la valeur moyenne de cos, de $\cos^2$ de $|\cos|$ sur un intervalle de longueur 2π.

Exercice 43

1. Montrer que pour tout réel $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{2}t^2 \leqslant \dfrac{t^2}{1+t} \leqslant t^2$.
2. En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

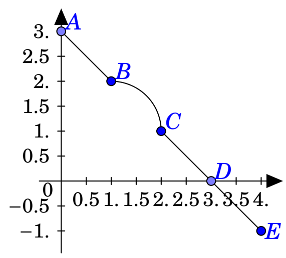
Exercice 44. ⟳

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ les intégrales $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t^2+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive.
2. Étudier la monotonie de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. Étudier les extremums de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+\mathrm{e}^t}$ sur $[0;1]$.
   En déduire un encadrement de J_n puis sa limite.

Exercice 45

La courbe représentative de la fonction f qui figure sur le graphe ci-contre est constituée de deux segments $[AB]$ et $[CE]$ et d'un quart de cercle entre B et C. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,3]$, puis sur $[0,4]$.



Solution de l'exercice 39

1. On trouve le tableau de signe de la fonction f à l'aide du signe des fonctions $x \mapsto x^2-1$ et $x \mapsto x-3$. On obtient finalement que la fonction f est négative avant -1, positive entre -1 et 1, négative entre 1 et 3 et positive après 3.
2. On calcule l'aire hachurée en rouge en effectuant le calcul suivant :
$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{3} f(x)dx.$$
3. Une primitive de $f(x) = (x^2-1)(x-3) = x^3-3x^2-x+3$ est donnée par la fonction $\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$. On obtient donc $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} = 4$. De la même façon, on trouve $\int_1^3 f(x)dx = -4$. Finalement, l'aire hachurée vaut 8 unités d'aire.

Solution de l'exercice 40

1. On étudie la fonction $f-g$. Elle est dérivable lorsque $x \neq 0$ car la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x \neq 0$, sa dérivée vaut $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = x + \frac{sgn(x)}{(1+|x|)^2}$, où $sgn(x) = -1$ si $x < 0$ et $sgn(x) = 1$ si $x > 0$. Elle est donc négative lorsque x est strictement négatif et positive lorsque x est strictement positif. Les limites de $f-g$ en $\pm\infty$ sont $+\infty$ et la valeur de $f-g$ en 0 est -1. La fonction $f-g$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ de $+\infty$ à -1 et croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ de -1 à $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires et l'injectivité d'une fonction strictement monotone nous assurent que $f-g$ vaut 0 exactement une fois dans $\mathbb{R}^{-*}$ et exactement une fois dans $\mathbb{R}^{-*}$. On peut voir avec l'aide du graphique que la fonction $f-g$ s'annule en $x = \pm 1$. Nous pouvons alors déduire de cette étude les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. D'après l'analyse graphique précédente, on trouve l'aire hachurée en calculant l'intégrale $\int_{-1}^{1}(g-f)(x)dx$. En effet, l'intégrale d'une fonction positive vaut l'aire comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de la fonction.
4. On a à l'aide de la formule de Chasles
$$\int_{-1}^{1}(g-f)(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+|x|} - \frac{x^2}{2}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+|x|} - \frac{x^2}{2}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{1+|x|} - \frac{x^2}{2}dx.$$
On en déduit
$$\int_{-1}^{1}(g-f)(x)dx = [-\ln(1-x) - \frac{x^3}{6}]_{-1}^{0} + [\ln(1+x) - \frac{x^3}{6}]_0^1 = 2\ln(2) - \frac{1}{3}.$$
Le résultat est en unité d'aire.

Solution de l'exercice 41

1. Indication : en utilisant la définition de la valeur moyenne d'une fonction et en la calculant pour une fonction constante égale à C, on trouve bien entendu C. Pour une fonction affine $f(x) = cx+d$, on trouve $(b-a)\big((a+b)\frac{c}{2}+d\big)$.
2. Indication : utiliser la proposition de la conservation de l'ordre et la question précédente.

TD n°9

Pré-requis :
- savoir dériver le produit de deux fonctions
- savoir calculer une primitive à l'aide du formulaire
- notion de bijection

Objectifs :
- calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties
- calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variables

Exercice 46

En utilisant la formule d'intégration par parties ci-dessus, calculez :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^1 e^x x^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 47

Calculez les intégrales suivantes en intégrant par parties :

1. $J_1 = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$,
2. $J_2 = \int_1^x t^n \ln t\,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 48

À l'aide de la formule de changement de variable, calculez les intégrales suivantes :

$$\int_0^x e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^x t^2 \exp(t^3)\,\mathrm{d}t.$$

Compléments

Exercice 49

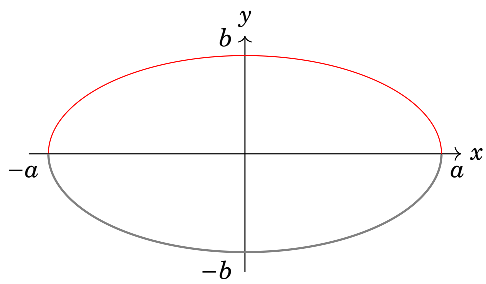
À l'aide d'une intégration par parties, trouver les intégrales de 0 à π des fonctions :

1. $f_1(x) = x\cos x$,
2. $f_2(x) = \arctan(x)$.

Exercice 50. Aire de l'ellipse

Une ellipse de demi-grand axe a et demi-petit axe b, représentée sur le graphique ci-contre, est l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'équation :

$$(E)\ :\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



1. Montrer que la partie supérieure de l'ellipse correspond au graphe de la fonction $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ sur $[-a, a]$. *(Cela revient à vérifier que le point de coordonnées $(x, f(x))$ vérifie l'équation (E).)*
2. Calculer $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $x(u) = a\cos(u)$.
3. En déduire l'aire de l'ellipse. *(On pourra vérifier le résultat en remarquant qu'une ellipse de demi-axes $a = b = r$ n'est rien d'autre qu'un cercle de rayon r.)*

Exercice 51.

On appelle intégrales de Wallis, les intégrales $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$. Démontrez, par récurrence que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ W_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\dots 4\cdot 2} \times \frac{\pi}{2}, \qquad W_{2k+1} = \frac{(2k)(2k-2)\dots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 3}.$$

Solution de l'exercice 46

Nous rappelons la formule d'intégration par parties : pour $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions, nous avons

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dt.$$

En choisissant $f(x) = -\cos(x)$ et $g(x) = x$, on a alors $f'(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = 1$ et ainsi

$$\int_0^{2\pi} x\sin(x)dx = [-\cos(x)x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos(x))dx = -2\pi.$$

De la même façon, en faisant une première intégration par parties avec $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$, on trouve

$$\int_0^1 e^x x^2 dx = [e^x x^2]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e^1 - 2\int_0^1 xe^x dx.$$

Nous effectuons alors une deuxième intégration par parties en prenant cette fois-ci $f(x) = e^x$ et $g(x) = x$. Nous obtenons

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^1 - [e^x]_0^1 = 1.$$

puis finalement $\int_0^1 e^x x^2 dx = e^1 - 2$.

Solution de l'exercice 47

1. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie pour $x \in]0, +\infty[$. Nous choisissons donc la borne d'intégration x dans cet intervalle. On écrit $\ln x = 1 \cdot \ln x$ et on effectue l'intégration par parties suivante :

$$\int_1^x 1 \cdot \ln(x)dx = [x \cdot \ln(x)]_1^x - \int_1^x x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + 1.$$

   Nous en déduisons l'ensemble des primitives de la fonction $\ln(x)$ qui est donc donné par les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x + C$ définies sur $]0, +\infty[$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

2. La fonction $x \mapsto x^n \ln(x)$ est définie pour $x \in]0, +\infty[$. Nous choisissons donc la borne d'intégration x dans cet intervalle. En effectuant une intégration par parties, nous trouvons alors

$$\int_1^x x^n \ln(x)dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_1^x - \int_1^x \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   Nous obtenons aussi l'ensemble des primitives de la fonction $x^n \ln(x)$ qui est donc donné par les fonctions $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. On retrouve bien le point précédent lorsque $n = 0$.

Solution de l'exercice 48

Dans cet exercice, nous utilisons le théorème de changement de variable. Nous avons

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Il faut bien faire attention au fait que les bornes d'intégration changent lorsque l'on effectue le changement de variable (si t varie de a à b, alors $u(t)$ varie de $u(a)$ à $u(b)$).

- La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ s'écrit comme la composée de la fonction exponentielle et de la fonction racine carrée. Le mot “composée" nous fait penser à la démonstration du théorème de changement de variable et c'est cette raison qui nous pousse à l'utiliser. Effectuons le changement de variable $u(t) = \sqrt{t}$. Il sera a priori plus facile de calculer l'intégrale de e^y en fonction de y plutôt que l'intégrale de $e^{\sqrt{t}}$ en fonction de t (mais on n'a pas de garantie que les autres termes qui vont apparaître dans l'intégrale rendront l'intégrale calculable). Le théorème de changement de variable nous dit alors que

$$\int_0^x e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{x}} e^y 2y\,\mathrm{d}y = 2\int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{x}} e^y y\,\mathrm{d}y$$

  (dans la formule du changement de variable, on a utilisé la fonction $f(y) = 2ye^y$). En effectuant maintenant une intégration par parties, on trouve

$$\int_0^x e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{x}} e^y y\,\mathrm{d}y = 2\left([e^y y]_0^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} e^y\,\mathrm{d}y\right) = 2e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} - 2e^{\sqrt{x}} + 2.$$

Pour être sûr de ne pas avoir fait d'erreur, il est facile de calculer la dérivée de cette fonction par rapport à la variable x et de voir que l'on obtient bien $e^{\sqrt{x}}$. Les primitives de la fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ sont donc les fonctions $2\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}} - 1) + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

- On prend cette fois-ci $f(y) = \exp(y)$ et $u(t) = t^3$, on obtient alors

$$\int_0^x t^2 \exp(t^3)\,\mathrm{d}t = \int_{0^3}^{x^3} \exp(y)\,\mathrm{d}y = \exp(x^3) - 1.$$

  Les primitives de la fonction $t \mapsto t \mapsto t^2 \exp(t^3)$ sont donc les fonctions $\exp(x^3) + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.