Limite d'une somme.

$\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) \backslash \lim\limits_{t\to\alpha} v(t)$	L'	$+\infty$	$-\infty$
L	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Test.

Exercice

Quelle est la limite, si elle existe, de $\exp(x) + \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

1. FI
2. $+\infty$
3. Vous ne savez pas
4. 0

Test.

Exercice

Quelle est la limite, si elle existe, de $\exp(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

1. FI
2. $+\infty$
3. Vous ne savez pas
4. 0

Limite d'un produit.

$\lim_{t\to\alpha} u(t) \backslash \lim_{t\to\alpha} v(t)$	$L'<0$	0	$L'>0$	$+\infty$	$-\infty$
$L<0$				$-\infty$	$+\infty$
0		LL'		FI	FI
$L>0$				$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Test.

Exercice

Combien vaut

$$\lim_{x \to 0} x \cos(x) \ ?$$

1. 0
2. 1
3. $+\infty$
4. Forme indéterminée
5. Cette fonction n'a pas de limite en 0

Limite d'un quotient.

<table>
<tr><th>$\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) \backslash \lim\limits_{t\to\alpha} v(t)$</th><th>$L'<0$</th><th>$L'>0$</th><th>$0$</th><th>$+\infty$</th><th>$-\infty$</th></tr>
<tr><td>$L<0$</td><td colspan="2" rowspan="3">$\dfrac{L}{L'}$</td><td>$\pm\infty$ [1]</td><td colspan="2" rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td>$L>0$</td><td>$\pm\infty$ [1]</td></tr>
<tr><td>0</td><td>FI</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$\pm\infty$ [1]</td><td colspan="2">FI</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$\pm\infty$ [1]</td><td colspan="2">FI</td></tr>
</table>

1. Attention : si v n'est pas de signe constant au voisinage de α, le quotient n'a pas de limite.

Test.

Exercice

Combien vaut

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \ ?$$

1. 0
2. 1
3. $+\infty$
4. Forme indéterminée
5. Cette fonction n'a pas de limite en 0

FI.

Il y a quatre formes indéterminées à connaître :

$$\infty - \infty = FI$$

$$\infty \times 0 = FI$$

$$\frac{0}{0} = FI$$

$$\frac{\infty}{\infty} = FI$$

Limite d'une composée.

Théorème

Soient u, g deux fonctions, α , β et γ trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to\alpha} u(t) & = & \beta \\ \lim\limits_{x\to\beta} g(x) & = & \gamma \end{array}\right\} \quad \text{alors} \quad \lim_{t\to\alpha} g(u(t)) = \gamma.$$

Test.

Exercice

Combien vaut

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) ?$$

1. 0
2. 1
3. $\dfrac{\pi}{2}$
4. $+\infty$
5. Forme indéterminée
6. Je ne sais pas comment calculer cette limite

Comparaison exponentielle et polynômes.

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

1. *en $+\infty$:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$$

2. *en $-\infty$:*

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$$

Comparaison exponentielle et polynômes.

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

1. *en $+\infty$:*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$
2. *en $-\infty$:*
$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Remarque

L'exponentielle va « plus vite » vers l'infini (resp. vers 0) que n'importe quelle puissance de x.

Test.

Exercice

Combien vaut

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t - t \ ?$$

1. 0
2. 1
3. $+\infty$
4. $-\infty$
5. On ne peut pas lever l'indétermination

Test.

Exercice

Combien vaut

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1-2x^3} \ ?$$

1. 0
2. 1
3. $+\infty$
4. $-\infty$
5. On ne peut pas lever l'indétermination

Croissances comparées.

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a*

1. *en* $+\infty$ *:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

2. *en* 0^+ *:*

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$$

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

1. *en* $+\infty$ *:*
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$
2. *en* 0^+ *:*
$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$$

Remarque

Le logarithme va « moins vite » vers l'infini que n'importe quelle puissance de x.

Test.

Exercice

Calculer $\lim_{x \to +\infty} 3x - 2\ln(x)$.

Asymptote horizontale.

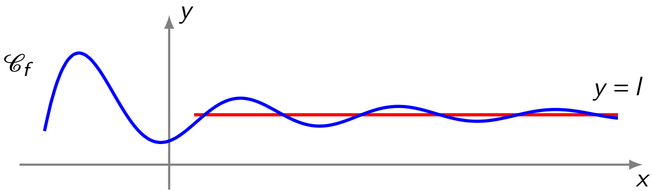
Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Asymptote horizontale.

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).



Asymptote oblique.

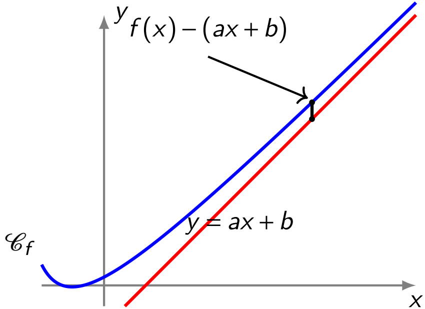
Définition

Soient f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et a, b deux réels.
Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$, on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$(respectivement en $-\infty$).

Asymptote oblique.

Définition

Soient f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et a, b deux réels.
Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$(respectivement en $-\infty$).



Asymptote verticale.

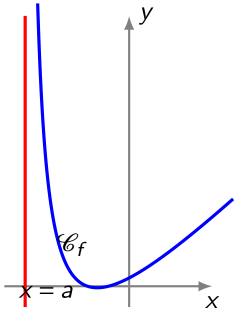
Définition

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (respectivement $x \to a^+$ ou a^-), alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Asymptote verticale.

Définition

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (respectivement $x \to a^+$ ou a^-), alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale d'équation $x = a$.



Exercice.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-2}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Déterminons l'asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Attention !

Une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ n'admet pas nécessairement une asymptote oblique.

Prochain cours.

- Prochain amphi demain à 15h10 en Grignard
- Pour le TD 7 faire l'exo 34
- Demain : interro !